

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Clasificación. Método de Gauss.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ecuaciones en las cuales las incógnitas aparecen elevadas a 1. Habitualmente, sobre todo cuando resolvemos problemas, el sistema contiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, pero eso no tiene por qué ocurrir en todos los casos.

La forma más general de un sistema de ecuaciones lineales es la siguiente:

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

donde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ son los coeficientes del sistema, x_1, x_2, \dots, x_n las incógnitas y b_1, b_2, \dots, b_n los términos independientes. Se trata de un sistema de **m ecuaciones con n incógnitas**.

Podemos clasificar los sistemas de ecuaciones atendiendo a diversos criterios. Uno de ellos es si el valor de los términos independientes es nulo o no. Así, un sistema de ecuaciones se dice **homogéneo** cuando **todos sus términos independientes son iguales a 0**.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = 0$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0$$

Otro criterio muy importante es el número de soluciones del sistema. Para los sistemas lineales sólo existen **tres** posibilidades: **ninguna** solución, **una** solución e **infinitas** soluciones. Según esto, tenemos la siguiente clasificación:



Si el sistema es homogéneo, tiene siempre al menos una solución, y es que todas las incógnitas valgan 0 (es evidente que se verifican así las ecuaciones). Esta solución recibe el nombre de **solución trivial**. Por lo tanto, **un sistema homogéneo nunca puede ser incompatible**. Siempre será compatible: determinado si sólo tiene la solución trivial e indeterminado si posee infinitas soluciones (una de las cuales debe ser la trivial).

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, se utiliza frecuentemente un método sistemático denominado **método de Gauss**, que viene a ser una extensión del conocido método de reducción para sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Consiste en sustituir las ecuaciones del sistema por otras, obtenidas por **combinación lineal** de ellas (es decir, mutliplicándolas por números y sumándolas), de tal manera que, al final, obtengamos lo que se llama un **sistema triangular**, del cual despejaremos las incógnitas una a una de forma escalonada.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a'_{22} x_2 + \dots + a'_{2n} x_n = b'_2$$

$$a'_{nn} x_n = b'_n$$