SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Resumen de los métodos de resolución.

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, podemos recurrir a uno de los siguientes métodos:

- **Método de Gauss**: Consiste en triangular la matriz de los coeficientes del sistema, combinando linealmente las filas, que representan, en realidad, las distintas ecuaciones. Podemos encontrar tres situaciones:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . \end{array}\right)$$

El sistema queda triangulado, con ceros por debajo de la diagonal principal.

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se obtienen una o varias filas de ceros. Indica que una o más ecuaciones son combinación de las otras.

SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

$$\left(\begin{array}{cccc|c} . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . \end{array}\right)$$

Se obtiene una fila con los coeficientes nulos y el término independiente distinto de cero.

SISTEMA INCOMPATIBLE

- **Teorema de Rouché y regla de Cramer**: La compatibilidad del sistema se estudia a partir de los rangos de la matriz de los coeficientes (A) y de la matriz ampliada (A'). Estas son las posibilidades:

Si ran (A) y ran (A') no coinciden ⟶ **SISTEMA INCOMPATIBLE**

Si ran (A) = ran (A') ⟶ **SISTEMA COMPATIBLE**
- **DETERMINADO** si ran (A) = nº incógnitas
- **INDETERMINADO** si ran (A) < nº incógnitas

Si el sistema es compatible, puede resolverse mediante la **regla de Cramer**, basada en el cálculo de determinantes. Para poder aplicarla, el sistema debe tener el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (se dice entonces que es un "sistema de Cramer"); si no es así, debemos eliminar ecuaciones sobrantes o considerar las incógnitas de más como parámetros, en función de los cuales se expresarán las demás.

En un sistema de Cramer, las incógnitas se calculan dividiendo dos determinantes: el de la matriz de coeficientes con la columna correspondiente a la incógnita sustituida por los términos independientes y el de la matriz de coeficientes sin sustituir.

- **Método matricial**: Todo sistema lineal cuadrado puede escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Si llamamos A a la matriz de coeficientes, X a la de incógnitas y B a la de los términos independientes, el sistema se expresaría así:

$$A \cdot X = B$$

y se resolvería calculando A^{-1} y multiplicando ambos miembros de la igualdad por la izquierda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Si existe A^{-1}, el sistema es compatible determinado. Si A^{-1} no existe, el sistema puede ser incompatible o indeterminado.