CÁLCULO DE DERIVADAS

Derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena

Dentro del cálculo de derivadas, merecen especial atención las funciones compuestas, es decir, aquellas que se obtienen al actuar sucesivamente dos o más funciones simples. Observa un ejemplo de este tipo de funciones, muy frecuentes en diversas situaciones:

$y = \cos^2 (2x - 3)$

Esta función se obtiene componiendo tres funciones simples:

$$x \xrightarrow{f(x) = 2x - 3} 2x - 3 \xrightarrow{g(x) = \cos x} \cos (2x - 3) \xrightarrow{h(x) = x^2} \cos^2 (2x - 3)$$

Para derivar funciones compuestas como la del ejemplo, utilizamos la **regla de la cadena**: la derivada se obtiene mediante un producto, cuyos factores resultan al derivar sucesivamente las funciones simples que forman la función compuesta, en orden inverso al de composición (de "fuera" hacia "dentro"). Veámoslo con la propia función del ejemplo:

$$y' = 2 \cos (2x - 3) \cdot [-\text{sen } (2x - 3)] \cdot 2 \implies y' = -4 \cos (2x - 3) \text{ sen } (2x - 3)$$

En esta tabla puedes ver algunos otros ejemplos:

Funciones	***Derivadas***
$y = (4x^2 - 3)^3$	$y' = 24x\,(4x^2 - 3)^2$
$y = \ln (3x + 1)$	$y' = \dfrac{3}{3x + 1}$
$y = e^{2x-5}$	$y' = 2\,e^{2x-5}$
$y = \text{sen } (x^3 + 5x^2 - 4x)$	$y' = (3x^2 + 10x - 4) \cos (x^3 + 5x^2 - 4x)$
$y = \text{tg}^3 (10x - 6)$	$y' = 30\,\text{tg}^2 (10x - 6)\,[1 + \text{tg}^2 (10x - 6)]$

Actividad

Halla las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

- $y = \cos^2 x - 1$
- $y = \ln (2x^2 + 3x - 5)$
- $y = 5^{3x-2}$
- $y = (6x + 8)^4$
- $y = \text{sen}^3 (5x - 9)$