LÍMITE DE FUNCIONES (I)

Cálculo de límites cuando x tiende a ∞

Los límites indican la **tendencia** de una función al incrementarse o disminuir x indefinidamente, o bien cuando x se aproxima infinitamente a un cierto valor. En los dos primeros casos, hablamos de límite cuando x tiende a + ∞ o a - ∞.

Cálculo de límites cuando $x \to +\infty$

Para determinar el comportamiento de la función al crecer x, podemos darle valores cada vez mayores y observar su tendencia. En la práctica, seguimos estas sencillas reglas:

1. En una función polinómica, el límite viene dado por el término de **mayor grado**.
2. En el caso de una función racional, debemos considerar los **grados** del numerador y del denominador:
- Si el grado del denominador es mayor, el límite vale 0.
- Si los grados son iguales, el límite es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado.
- Si el grado del numerador es mayor, el límite vale ∞, y el signo viene dado por el cociente entre los términos de mayor grado.

3. En general, cuando comparamos en sumas, restas o cocientes funciones que tienden a ∞, la tendencia es la que corresponde al **infinito de mayor orden**, es decir, la función cuyo crecimiento es más rápido. Este orden es: exponencial > potencia > logaritmo.

Cálculo de límites cuando $x \to -\infty$

Este tipo de límites se calculan cambiando x de signo en la expresión de la función y obteniendo el límite de la misma cuando x tiende a + ∞. Es decir, se cumple lo siguiente:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x)$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty} (3x^2 - 4x - 5x^3) = -\infty$$
El término que determina la tendencia es "$-5x^3$"; por tanto, el límite es - ∞.

$$\lim_{x\to-\infty} (8x^2 - 4x - 6) = +\infty$$
El término de mayor grado es "$8x^2$", que es positivo siempre. Así pues, vale + ∞.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 6}{7 - 2x} = -3/2$$
Es un cociente de polinomios del mismo grado, por tanto el límite es igual al cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado (3 y -2).

Actividad

Calcula el valor de los siguientes límites:

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{2 - x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1 + x^2}$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - x}{5 - 2x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x - x^2}$
- $\lim_{x\to+\infty} (2x + 7x^2 - x^3)$
- $\lim_{x\to-\infty} (x - 2^x)$
- $\lim_{x\to-\infty} (4x^3 + 10x + 1)$
- $\lim_{x\to-\infty} (2x^2 - 1/x)$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{6}{2x + x^3}$
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{5 - 4x^3}{2x^3 - x^2}$

LÍMITE DE FUNCIONES (II)

Cálculo de límites cuando x tiende a c

Un tercer tipo de límite es aquel en que x se aproxima infinitamente a un valor c. En este caso, la aproximación puede ser por la izquierda o por la derecha: son los llamados **límites laterales**.

Límites laterales cuando $x \longrightarrow c$

Son los valores a los que tiende la función cuando x se aproxima a c por la izquierda ($x \to c^-$), es decir, tomando valores **menores** que c, o por la derecha ($x \to c^+$), esto es, dándole valores **mayores** que c. Para calcularlos, seguimos estas reglas:

1. Si la función es **continua**, tanto el límite por la izquierda como el límite por la derecha coinciden con f(c).
2. Si la función está **definida a trozos** y el cambio se produce en x = c, entonces debemos calcular los límites laterales sustituyendo por c en las expresiones a la izquierda (x<c) y a la derecha (x>c) de x = c.

3. Si c **no pertenece al dominio** de la función y ésta se va a ∞ al aproximarse a x = c, los límites laterales valen ∞, y podemos determinar el signo fácilmente sustituyendo en la función valores próximos a x = c, menores y mayores respectivamente.

Límite de una función cuando $x \longrightarrow c$

Si los límites laterales existen y coinciden en valor, decimos que dicho valor es el límite de la función cuando $x \to c$. Si la función es **continua**, el límite es simplemente el valor de **f(c)**.

Ejemplos

$$\lim_{x\to 3} (x^2 + 4x - 5) = 3^2 + 4 \cdot 3 - 5 = 16$$

Hemos calculado f(3), pues se trata de una función continua.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{3x-6} = 3/0$$

El 2 no pertenece al dominio de esta función; por tanto, al sustituir, se obtiene un cociente del tipo "k/0", que nos indica que la función se va a ∞. Debemos estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{3x-6} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{3x-6} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = 0/0$$

En este caso, hemos obtenido una indeterminación. Se resuelve factorizando los polinomios y simplificando el factor "x - 1", responsable de la indeterminación:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = 0/(-1) = 0$$

Actividad

Calcula el valor de los siguientes límites:

- $\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{9-x^2}$
- $\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$
- $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x}{3x}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{3x+1}$
- $\lim_{x\to -1} (x - 8x^2 + x^3)$
- $\lim_{x\to 0} (2x - 2^x)$
- $\lim_{x\to 2} [7(x-2)^2 + 15]$
- $\lim_{x\to 1} (\ln x - x)$
- $\lim_{x\to -3^-} \frac{4}{2x+6}$
- $\lim_{x\to 1/2} \frac{2x-1}{4x^2-4x+1}$