

## MATRICES Y DETERMINANTES

**1** Dadas las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$  y  $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ,

realiza los siguientes cálculos:

a)  $2A - C + 3I$

b)  $A \cdot B$

c)  $A^2 + C$

d)  $C^t \cdot B + 2B$

e)  $B^t \cdot A$

f)  $I - A^t$

**2** Escribe ejemplos de:

a) Una matriz  $3 \times 5$  cuyo rango sea 2.

b) Una matriz no nula que coincida con su traspuesta.

c) Una matriz columna.

d) Una matriz y su opuesta.

e) Una matriz que pueda multiplicarse por otra  $2 \times 3$  por la derecha.

**3** Busca todas las matrices  $B$  que conmutan con la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**4** Resuelve estos sistemas matriciales:

a)  $2X - Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

b)  $X + Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$

$3X + 2Y = 3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$2X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**5** ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta, utilizando ejemplos si lo crees necesario:

a) Toda matriz cuadrada tiene determinante.

b) El determinante es cero si una fila es suma de otras dos.

c) El determinante de una matriz singular es cero.

d) Si una matriz  $4 \times 4$  se multiplica por 3, su determinante también queda multiplicado por 3.

e) Si los elementos de una matriz son todos positivos, su determinante no puede ser cero.

**6** Halla el valor de los siguientes determinantes de orden 4:

a)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 11 & 10 & -13 & 4 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ -1 & 5 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

**7** De una matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$  sabemos que su determinante vale  $k$ .

a) Escribe una matriz cuyo determinante sea  $-k$  y otra cuyo determinante valga  $-k/2$ .

b) Calcula y justifica el valor del determinante  $\begin{vmatrix} 2d & f & d-e \\ 2a & c & a-b \\ 2g & i & g-h \end{vmatrix}$ .

**8** Calcula la matriz inversa de las siguientes:

a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$       c)  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

**9** Halla el rango de estas matrices:

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$       b)  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

**10** Estudia el rango de las matrices  $A$  y  $B$  en función de los parámetros que contienen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ -a & 2 & 2a \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

**11** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 3a \end{pmatrix}$ :

- a) ¿Para qué valores de  $a$  existe  $A^{-1}$ ?  
b) Halla, si es posible, la inversa de  $A$  para  $a = 1$ .

**12** Resuelve la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

**SOLUCIONES:**

1.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 5 & -4 & 3 \\ 1 & -7 & 11 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 9 & 4 & -9 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & 10 & 2 & -14 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ 3 & 11 & 2 \\ 10 & 6 & 15 \end{pmatrix} \\ \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 8 & 11 & -8 & -7 \\ 32 & 29 & -32 & -1 \\ 2 & 4 & -2 & -8 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 13 & -2 & 4 \\ 12 & -5 & 14 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Respuesta libre

3. Son de la forma  $\begin{pmatrix} -x+y & -2x \\ x & y \end{pmatrix}$ .

4. a)  $X = \begin{pmatrix} 1/7 & 0 \\ -6/7 & 23/7 \end{pmatrix}$  ;  $Y = \begin{pmatrix} -12/7 & 0 \\ 9/7 & 18/7 \end{pmatrix}$

b)  $X = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 11 & -10 \end{pmatrix}$  ;  $Y = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}$

5. Verdaderas: a, b y c; Falsas: d y e.

6. Ambos valen 0.

7. a) Respuesta libre. b)  $-2k$

8.

a)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -2 & 3/2 \end{pmatrix}$     b)  $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/6 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 1 \\ -1/3 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$     c)  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/18 & -1/6 & 2/9 \\ 1/9 & 1/3 & -1/9 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

9. El rango es 3 para ambas.

10.

- Para  $a = 0$  o  $a = -1/2$ , rango (A) = 2; para  $a \neq 0$  y  $a \neq -1/2$ , rango (A) = 3.
- Para  $b=1$ , rango (B) = 1; para  $b = -2$ , rango (B) = 2; para  $b \neq 1$  y  $b \neq -2$ , rango (B) = 3.

11. a) Para  $a \neq 0$  y  $a \neq 7/6$     b)  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 7 & -6 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$     12.  $X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$