PRIMITIVAS E INTEGRAL DEFINIDA
Ejercicios de selectividad

1 Sea f : R 6 R la función definida por f(x) = $e^{x/3}$.
(a) ¿En qué punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.
(b) Calcula el área del recinto acotado que está limitado por la gráfica de f, la recta tangente obtenida y el eje de ordenadas.

2 Sea f : (0, +4) 6 R la función definida por f(x) = (x - 1) ln x, donde ln x es el logaritmo neperiano de x. Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, - 3/2).

3 Sea f : (-1, 1) 6 R la función definida por f(x) = ln (1 - x^2). Calcula la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

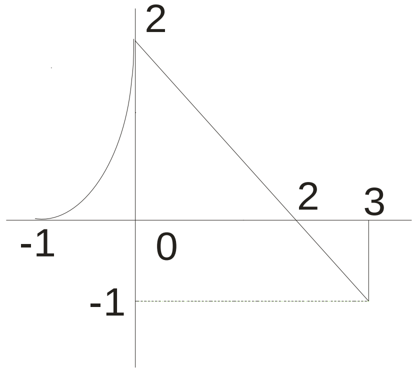
4 Se sabe que la función f : R 6 R definida por f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0 y que su gráfica tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = -1 . Conociendo además que $\int_0^1 f(x)dx = 6$, halla a, b y c.

5 Dadas la parábola de ecuación y = 1 + x^2 y la recta de ecuación y = 1 + x, se pide:
(a) Área de la región limitada por la recta y la parábola.
(b) Ecuación de la recta paralela a la dada que es tangente a la parábola.

6 Considera la función f : (0, +4) 6 R definida por f(x) = x ln x. Calcula:
(a) $\int f(x)dx$
(b) Una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (1, 0).

7 Halla el área del recinto limitado entre la gráfica y el eje OX que aparece en la figura adjunta, sabiendo que la parte curva tiene como ecuación

$$y = \frac{2x+2}{1-x}$$



8 Las coordenadas (a, b) del centro de gravedad de una lámina de densidad uniforme que está limitada por la curva y = sen x y la porción del eje OX comprendida entre x = 0 y x = π/2, vienen dadas por

$$a = \frac{\int_0^{\pi/2} x\, senx\, dx}{\int_0^{\pi/2} senx\, dx} \qquad y \qquad b = \frac{\int_0^{\pi/2} (senx)^2\, dx}{2\int_0^{\pi/2} senx\, dx}$$

(a) Describe el método de integración por partes.
(b) Utiliza dicho método para calcular el centro de gravedad de la lámina sabiendo que

$$\int_0^{\pi/2} (senx)^2\, dx = \frac{\pi}{4}$$

9 (a) Dibuja el recinto limitado por las curvas

$y = e^{x+2}$, $y = e^{-x}$ y $x = 0$.

(b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

10 Considera la función f: R 6 R definida por $f(x) = 2 + x - x^2$. Calcula α, $\alpha < 2$, de forma que

$$\int_\alpha^2 f(x)\, dx = \frac{9}{2}$$

11 (a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas

$y = x^2 + 1$, $y = 2 / x$ e $y = x - 1$

(b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

12 (a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa x = 1 y el eje de abscisas.
(b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

13 Calcula el valor de α positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = \alpha x - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Representa la curva que se obtiene para dicho valor de α.

14 Considera la función f : R 6 R definida por $f(x) = (1 + x)\, e^x$.

(a) Calcula $\int f(x)\, dx$.

(b) Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto (0, 3).

15 Calcula la siguiente integral definida. ¿Qué representa geométricamente?

$$\int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$$

16 Calcula el valor de la integral

$$\int_{-1}^{3}(x^2+5)\,e^{-x}dx$$

17 Considera las funciones f, g : R 6 R definidas por

f(x) = 6 - x^2 , g(x) = |x| , x 0 R

(a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas de f y g.
(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

18 Sea F : R^+ 6 R la función definida por $F(x)=\int_0^x (2t+\sqrt{t})\,dt$.

(a) Determina F(1).
(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa x=1.

19 Considera las funciones f, g : [0, 2π] 6 R

f(x) = 2 sen x y g(x) = sen 2x

(a) Dibuja la región del plano limitada por las gráficas de f y de g.
(b) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

20 Considera la función f : [0, π^2/4] 6 R definida por f(x) = sen %x.
(a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones x = 0 y x = π^2/4.
(b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior. (Usa en la integral el cambio de variable t = $\sqrt{x}$).

21 Calcula el valor de la integral $\int_{-1}^{2}\frac{2x^3-x^2-12x-3}{x^2-x-6}dx$.

22 Considera la función f : R 6 R definida en la forma f(x) = 1 + x |x|.
(a) Halla la derivada de f.
(b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
(c) Calcula $\int_{-1}^{2} x\,f(x)\,dx$.

23 De la función f : R 6 R definida por f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$, se sabe que tiene un máximo relativo en x = 1, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$. Halla la expresión de f.

24 Sea f una función continua en el intervalo [2, 3] y F una función primitiva de f tal que F(2) = 1 y F(3) = 2. Calcula:

(a) $\int_2^3 f(x)\,dx$ (b) $\int_2^3 (5f(x)-7)\,dx$ (c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\,dx$

25 Sea la función f definida por f(x) = $\frac{2}{x^2-1}$ para x ≠ -1 y x ≠ 1.

(a) Halla una primitiva de f.

(b) Calcula el valor de k para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de f en el intervalo [2, k] sea ln 2.

26 Sea I = $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$.

(a) Expresa la integral I aplicando el cambio de variable t = $\sqrt{1-x}$.
(b) Calcula el valor de I.

27 Sean f : R → R y g: R → R las funciones definidas mediante

$$f(x) = |\,x\,(x-2)\,| \qquad y \qquad g(x) = x + 4$$

(a) Esboza las gráficas de f y g sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
(b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

28 Sea g : R → R la función definida por g(x) = ln (x^2 + 1). Calcula la primitiva de g cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.

SOLUCIONES

1 a) En el punto (3, e). b) $3/2e - 3\ \ u^2$

2 $F(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \dfrac{x^2}{4} + x - \dfrac{9}{4}$

3 $F(x) = x\ln(1-x^2) - 2x + \ln\dfrac{1+x}{1-x} + 1$

4 a = 3 ; b = 0 ; c = 19/4 La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 + 19/4$

5 a) $5/6\ u^2$ b) $y = x + 3/4$

6 a) $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$ b) $F(x) = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{1}{4}$

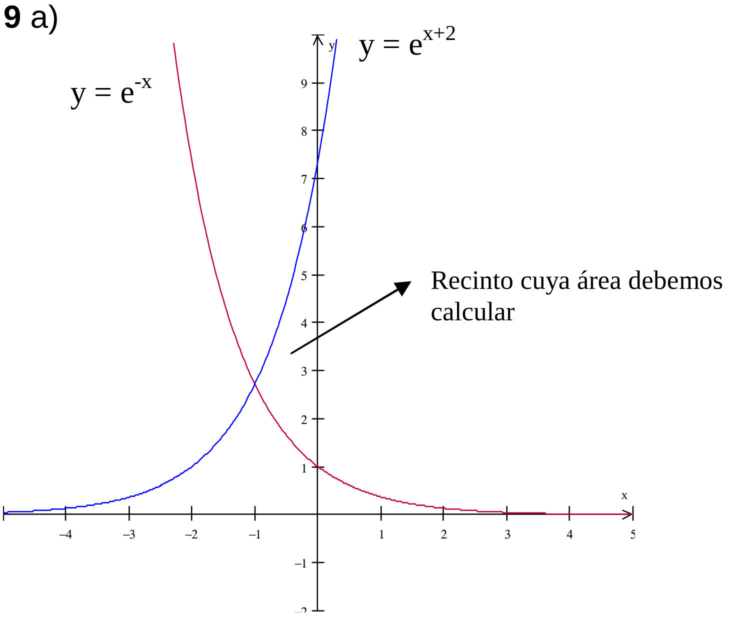
7 El área vale $9/2 + 4\ln 2\ \ u^2$.

8 a) Es un método que se utiliza para calcular una integral del tipo "u dv" cuando la integral del tipo "v du" es más sencilla. Se basa en la expresión de la derivada de un producto:

$d(u\cdot v) = u\,dv + v\,du \quad\Rightarrow\quad u\,dv = d(u\cdot v) - v\,du \quad\Rightarrow\quad \int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

b) $\int x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = -x\cos x + \mathrm{sen}\,x + C$ Centro de gravedad : (1, π/8)

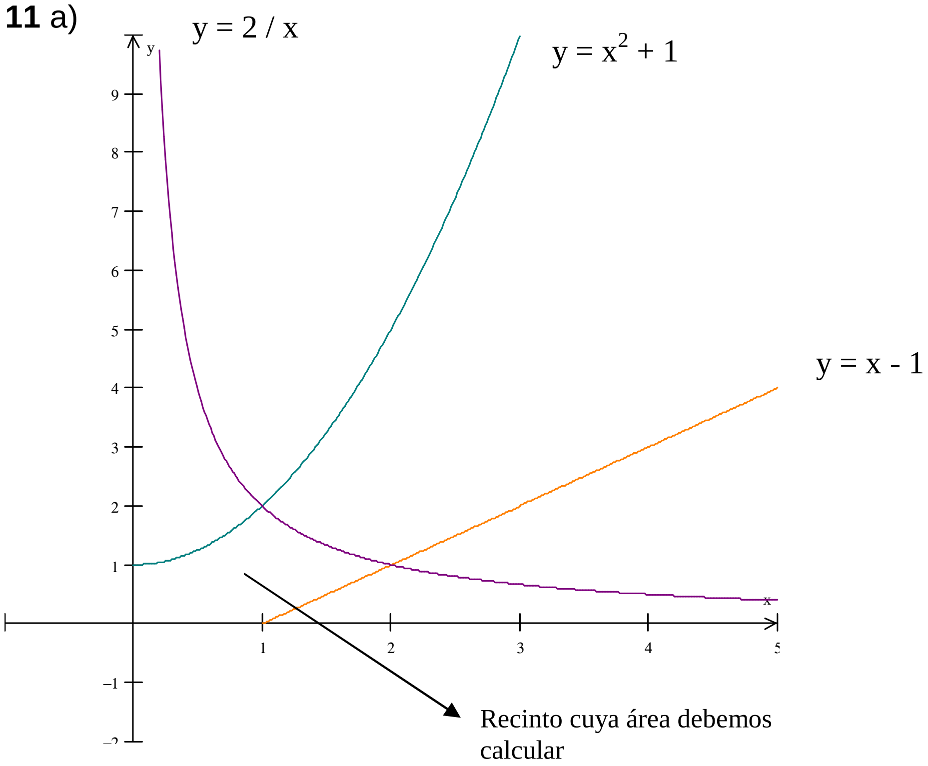
9 a)



b) Área = $\int_{-1}^{0}(e^{x+2} - e^{-x})\,dx = e^2 - 2e + 1\quad u^2$

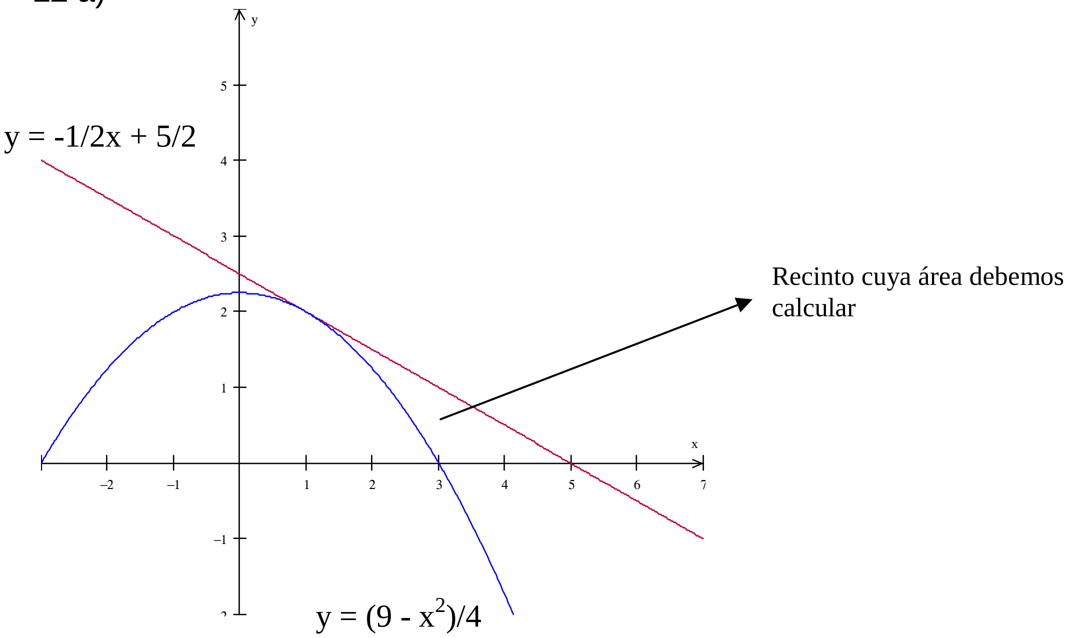
10 $\alpha = -1$

11 a)



b) Área = $\int_0^1 (x^2+1)\,dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - (x-1)\right) dx = \frac{5}{6} + 2\ln 2 \quad u^2$

12 a)



b) Área = $\int_1^3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{9-x^2}{4}\right) dx + \int_3^5 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right) dx = \frac{13}{6} \quad u^2$

13 $\alpha = 6$

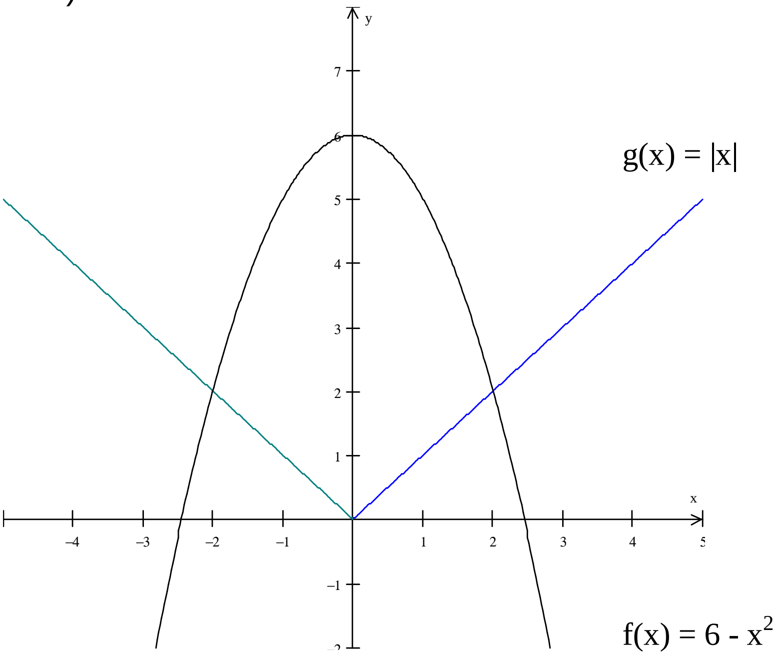
14 a) $\int (1+x)\, e^x \, dx = x\, e^x + C$

b) $F(x) = x\,e^{x} + 3$

15 $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\ln\frac{9}{5}$ Equivale al área del recinto limitado por la curva, el eje OX y las rectas verticales x = 0 y x = 2.

16 $\int_{-1}^{3} (x^2+5)\,e^{-x}\,dx = -22\,e^{-3} + 6e$

17 a)

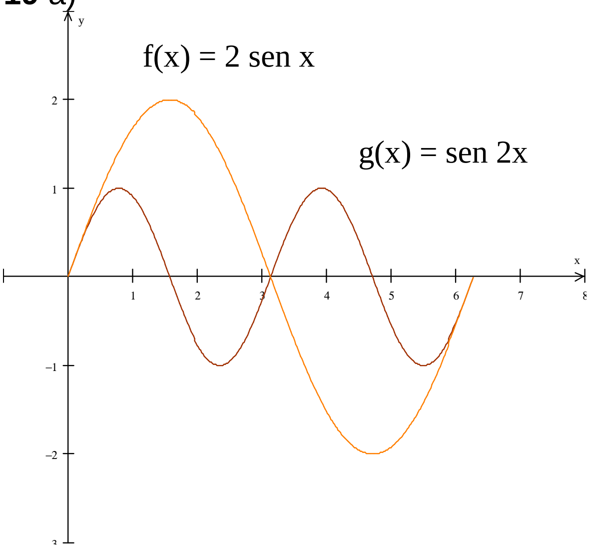


b) Área = $\int_{-2}^{0} (6-x^2-(-x))\,dx + \int_0^2 (6-x^2-x)\,dx = 44/3\ \ u^2$

18 a) $F(1) = \int_0^1 (2t+\sqrt{t})\,dt = 5/3$

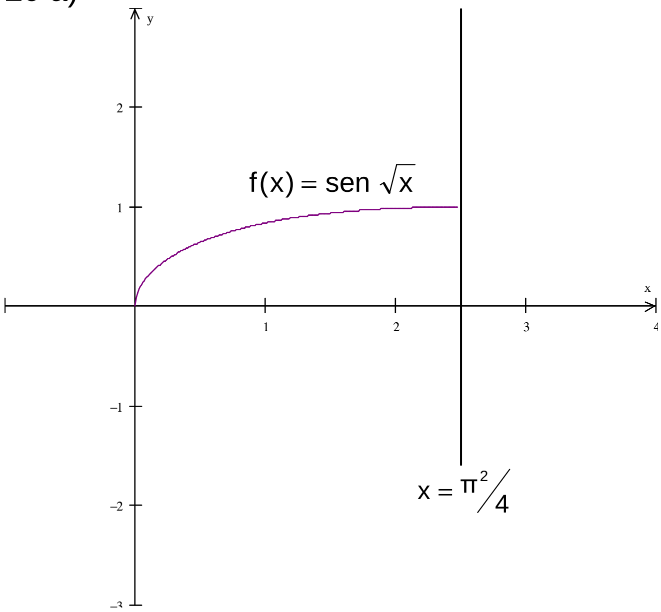
b) $F'(x) = 2x + \sqrt{x}$ La recta tangente tiene por ecuación y = 3x – 4/3

19 a)



b) Área = $\int_0^{\pi}(2 \text{ sen } x - \text{sen } 2x)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi}(\text{sen } 2x - 2 \text{ sen } x)\, dx = 8 \ \ u^2$

20 a)



b) Área = $\int_0^{\pi^2/4} \text{sen } \sqrt{x}\ dx = \int_0^{\pi/2} 2t \text{ sen } t\ dt = 2$

21 6 – 7/5 ln 4

22 a) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x<0 \\ 1+x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x<0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

b) La función es creciente en todo R

c) $\int_{-1}^{2} x\ f(x)\ dx = \int_{-1}^{0} x\ (1-x^2)\ dx + \int_{0}^{2} x\ (1+x^2)\ dx = 25/4$

23 f(x) = - x^3 + 3x

24 (a) $\int_2^3 f(x)\,dx = F(3) - F(2) = 1$

(b) $\int_2^3 (5f(x)-7)\ dx = 5\ F(3) - 7 \cdot 3 - 5\ F(2) + 7 \cdot 2 = -2$

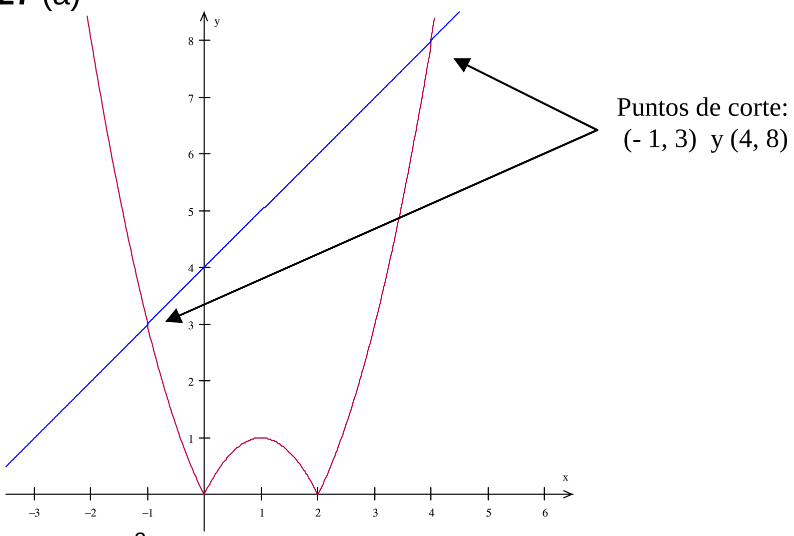
(c) $\int_2^3 (F(x))^2 f(x)\ dx = \frac{[F(3)]^3}{3} - \frac{[F(2)]^3}{3} = \frac{7}{3}$

25 a) $\int \frac{2}{x^2-1}\, dx = \ln \frac{x-1}{x+1} + C$ b) k = 5

26 a) $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\, dx = \int_1^0 \frac{1-t^2}{1+t}\, 2t\ dt = \int_1^0 (2t - 2t^2)\ dt$

b) -1/3

27 (a)



(b) 49/6 u^2

28 $G(x) = x \ln (x^2 + 1) - 2x + 2 \text{ arctg } x$