LÍMITES, DERIVADAS Y FUNCIONES

1 Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x}$ b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-5x+8}{x^2-1}$ c) $\lim_{x\to -\infty} (e^x - 3x^3)$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{x^3-4}$ e) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$ f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x^2+1}{x+2}$

2 Calcula la derivada de estas funciones:

a) $y = (3x^3+5x^2-1)^3$ b) $y = \log x \bullet (2x+4)^2$

c) $y = \frac{3x-5}{2x^2+6x}$ d) $y = \ln(3x+8)$

e) $y = \sqrt{5x^4-7}$ f) $y = 3^{5x^2-3x+9}$

3 Halla el valor de los parámetros a y b para que estas funciones sean derivables en todo su dominio:

a) $y = \begin{cases} 2ax-b & \text{si } x \le 1 \\ x^2-bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} \frac{a}{x}-bx+2 & \text{si } x \ge 2 \\ ax^2+b & \text{si } x < 2 \end{cases}$

4 El número de visitantes diarios de una exposición se obtiene según esta función:

$$N(t) = 160t - 4t^2 + 40$$

donde t es el número de días transcurridos desde la inauguración. Calcula el máximo número de visitantes diarios que ha recibido la exposición y en qué día se ha producido este máximo.

5 El número de bacterias (en miles) en un cultivo después de t horas viene dado por la expresión $N(t) = 2t\,(t-10)^2 + 50$. ¿En qué momento se alcanza la población máxima y la mínima, durante las 10 primeras horas?

6 Halla las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{2x^2+1}{x+2}$ b) $y = \frac{x+3}{x-1}$

7 Representa gráficamente estas funciones, estudiando su dominio, sus asíntotas y/o ramas infinitas, su simetría, su crecimiento, su curvatura y sus puntos de corte con los ejes:

a) $y = \frac{2x}{x^2-1}$ b) $y = x^3-4x^2+3$

c) $y = \frac{x-1}{x^2}$ d) $y = \frac{1}{x^2-4}$

SOLUCIONES

1 a) No existe (+∞ por la izquierda y -∞ por la derecha)
b) 2 c) +∞ d) 0 e) 0 f) -5

2

a) $y' = (27x^2 + 30x)\ (3x^3 + 5x^2 - 1)^2$

b) $y' = \dfrac{(2x+4)^2}{x \ln 10} + (8x+16)\log x$

c) $y' = \dfrac{-6x^2 + 20x + 30}{(2x^2 + 6x)^2}$

d) $y' = \dfrac{3}{3x+8}$ e) $y' = \dfrac{10x^3}{\sqrt{5x^4 - 7}}$ f) $y' = \ln 3\ (10x - 3)\ 3^{5x^2 - 3x + 9}$

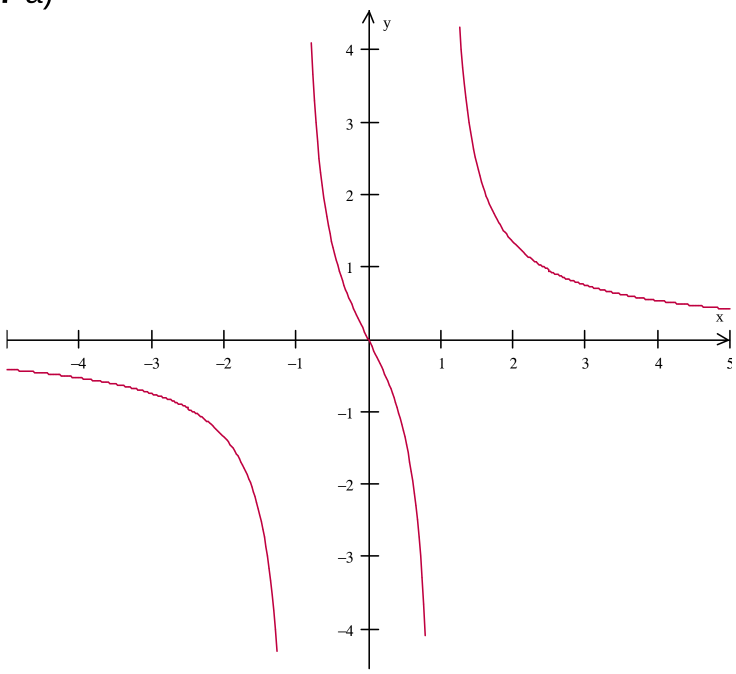
3 a) a = 1 y b = 0 b) a = - 8 / 37 y b = 34 / 37

4 El número máximo de visitantes ha sido 1640 y se produjo el día número 20.

5 La población máxima se alcanza para t = 10/3 y la población mínima se alcanza tanto para t = 0 como para t = 10.

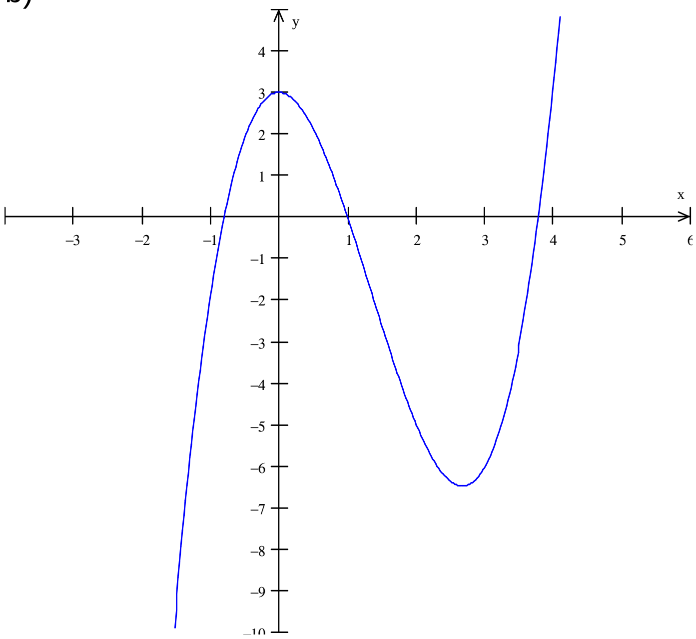
6 a) Asíntota vertical x = -2; asíntota oblicua y = 2x – 4
b) Asíntota vertical x = 1; asíntota horizontal y = 1

7 a)



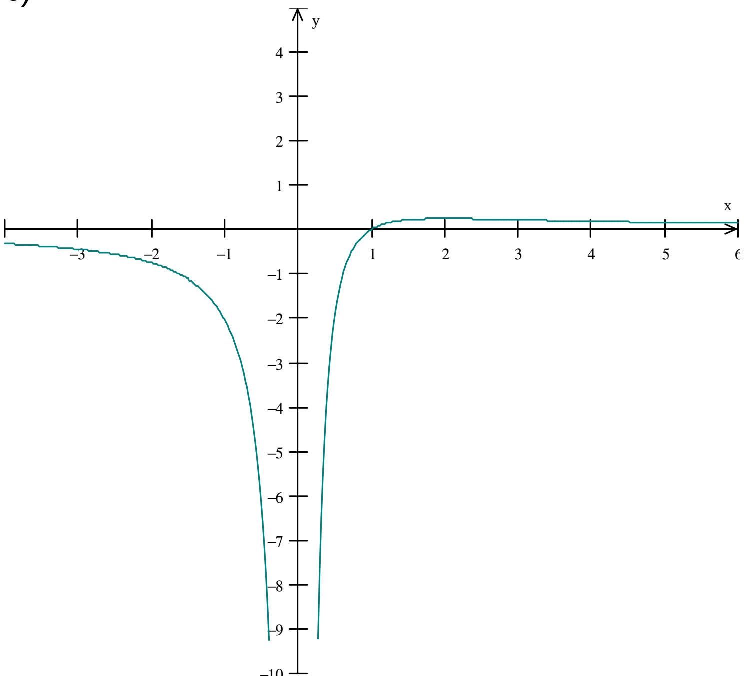
- D = R – {±1}
- A.H. y = 0
- A.V. x = -1 ; x = 1
- Es impar
- Corta a los ejes en (0,0)
- Es decreciente; no tiene extremos relativos.
- Es cóncava en (-∞, -1) U (0, 1).
- Es convexa en (-1, 0) U (1, +∞)

b)



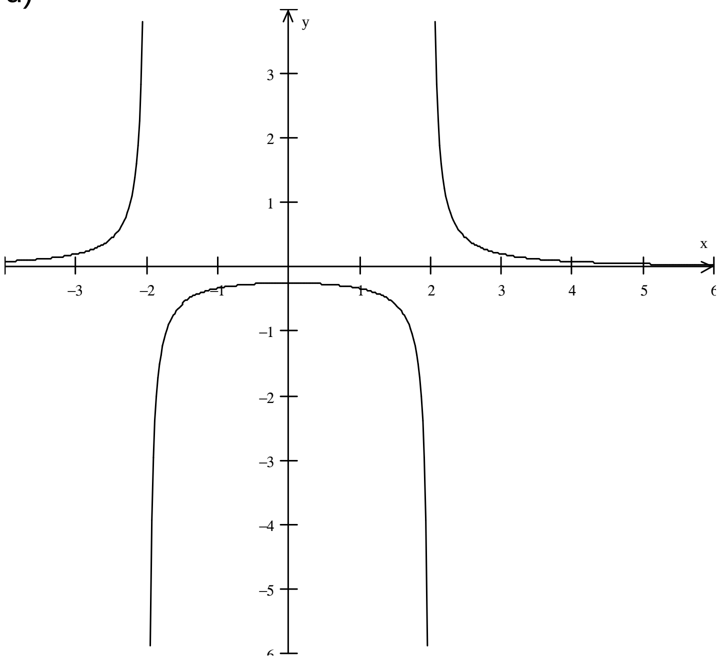
- D = R
- Tiene ramas infinitas (-∞ por la izquierda y +∞ por la derecha)
- No presenta simetría.
- Corta a los ejes en (0, 3) y en (1, 0), (3,79, 0) y (-0,79, 0)
- Es creciente en (-∞, 0) U (8/3, +∞) y decreciente en (0, 8/3). Presenta un máximo relativo en (0, 3) y un mínimo relativo en (8/3, -175/27)
- Es cóncava en (-∞, 4/3) y es convexa en (4/3, +∞). Presenta un punto de inflexión en (4/3, - 47/27).

c)



- D = R – {0}
- A.H. y = 0
- A.V. x = 0
- No presenta simetrías.
- Corta al eje OX en (1,0)
- Es decreciente en (-∞, 0) U (2, +∞) y creciente (0,2). Tiene un máximo en (2, 1/4).
- Es cóncava en (-∞, 0) U (0, 3). Es convexa en (3, +∞). Tiene un punto de inflexión en (3, 2/9).

d)



- D = R – {±2}
- A.H. y = 0
- A.V. x = -2 ; x = 2
- Es par.
- Corta al eje OY en (0, -1/4)
- Es decreciente en (0, 2) U (2, +∞) y creciente (-∞, -2) U (-2, 0). Tiene un máximo relativo en (0, -1/4).
- Es cóncava en (-2, 2). Es convexa en (-∞, -2) U (2, +∞). No tiene puntos de inflexión.