GEOMETRÍA ANALÍTICA. VECTORES Y ECUACIONES DE LA RECTA

1 Dados los vectores $\vec{u} = (-8, 4)$ y $\vec{v} = (1, -3)$, calcula:
a) Dos vectores unitarios con la misma dirección que $\vec{u}$.
b) Dos vectores ortogonales a $\vec{v}$ y de módulo 3.
c) El ángulo que forman ambos vectores.
d) La expresión del vector $\vec{w} = (-2, 5)$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

2 Dados los puntos A (8, -1), B (5, 0) y C (2, 3):
a) Indica razonadamente si están alineados.
b) Halla el punto medio del segmento AC.
c) Calcula las coordenadas de un cuarto punto D tal que ABCD sea un paralelogramo.
d) Calcula las coordenadas del punto simétrico de B con respecto a C.
e) Halla las coordenadas del punto P tal que **AP** = 2 **PC**.

3 Un triángulo tiene sus vértices en los puntos A (1, 1), B (5, 3) y C (-1, 3). Halla la longitud de sus lados y el valor de sus ángulos y señala de qué tipo de triángulo se trata.

4 Considera el segmento de extremos A (2, 4) y B (5, -1). Halla los puntos necesarios para:
a) dividirlo en tres partes iguales.
b) dividirlo en cinco partes iguales.

5 Los puntos A (- 2, -1), B (3, 0), C (4, 3) y D (- 1, 2) forman un cuadrilátero, unidos en ese orden.
a) Halla la medida de sus lados y sus ángulos. ¿Qué tipo de cuadrilátero es?
b) Calcula la longitud de sus diagonales.
c) Halla el punto de corte de ambas diagonales.

6 Una recta pasa por los puntos P (4, 5) y Q (- 2, 4).
a) Expresa la ecuación de esta recta en todas las formas posibles, indicando en cada caso de cuál se trata.
b) Halla una recta paralela a la anterior y que pase por el punto (1, 2).
c) Calcula la recta perpendicular a la primera que pasa por el punto (0, - 5).
d) Halla la recta que corta a la primera en P y cuya pendiente es - 2.

7 Una recta tiene como ecuación implícita

$$2x - 5y + 2 = 0$$

Indica, justificando tu respuesta, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) Un vector de dirección de esa recta es el (10, 4).
b) Es paralela a la recta $-2x + 5y - 7 = 0$.
c) Pasa por el punto (1, 0).
d) Es perpendicular a la recta $y = -2/5\, x + 1$.
e) También pasa por el punto (-1, 0).

8 ¿Pertenecen estos puntos a las rectas que se indican? En caso negativo, busca un punto que pertenezca a la recta dada.

a) P (8, 1) $(x, y) = (-1, 6) + \lambda\ (9, -5)$

b) Q (- 1, 0) $y = 4x - 1$

c) R (- 2, 5) $3x - y + 11 = 0$

9 Expresa en todas las formas posibles las siguientes rectas. Indica además, para cada una de ellas, un vector de dirección, dos puntos por los que pasa y su pendiente:

a) $2x - y + 7 = 0$

b) $y = 3x + 4$

c) $x = 2 - \lambda$
$y = 4\lambda$

d) $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$

e) $y = 3 - 6(x + 2)$

f) $(x, y) = (0, 5) + \lambda\ (-2, 3)$

10 Una recta tiene una ecuación general $3x + y + 3 = 0$.

a) Halla la ecuación de una recta paralela a ella que pase por el punto (1, 1).

b) Calcula la ecuación de una recta perpendicular que pase por el punto (0, 0).

c) Halla la distancia del punto P (2, 2) a la recta del enunciado.

11 Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si son secantes, calcula además el ángulo que forman y su punto de corte:

a) $r: 4x - y = 0$ $s: y = 2x - 3$

b) $r: (x, y) = (2, 0) + \lambda\ (1, -6)$ $s: 6x + y - 7 = 0$

c) $r: x = 2 - 4\lambda$, $y = -5$ $s: x = 3 - \lambda$, $y = 4\lambda$

12 Calcula la distancia de los siguientes puntos a las rectas dadas en cada caso:

a) P (3, 5) $5x + y - 1 = 0$

b) Q (- 4, 2) $x = 2 + \lambda$
$y = -1 + 3\lambda$

c) R (0, 7) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3}$

d) S (6, - 1) $y = x - 7$

13 Pon un ejemplo para cada apartado:

a) Una recta que corte a la recta $2x - y + 3 = 0$.

b) Una recta perpendicular a la recta $y = 6x - 5$.

c) Una recta paralela a la recta $4 - x = \dfrac{y-5}{3}$.

d) Una recta que pase por el punto (- 5, 4).

e) Una recta que corte a la anterior en dicho punto.

SOLUCIONES

1 a) $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ b) $\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $\left(-\frac{9}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

c) 135º d) $\vec{w} = \frac{1}{20}\vec{u} - \frac{8}{5}\vec{v}$

2 a) No están alineados, pues los vectores formados tomando los puntos dos a dos no son de la misma dirección.
b) M (5, 1) c) D (5, 2) d) B' (-1, 6) e) P (4, 5/3)

3 $AB = 2\sqrt{5}$; $AC = 2\sqrt{2}$; $BC = 6$; $\hat{A} = 108{,}4º$; $\hat{B} = 26{,}6º$; $\hat{C} = 45º$; es un triángulo escaleno y obtusángulo.

4 a) P(3, 7/3) y Q(4, 2/3) b) P_1(13/5, 3), P_2(16/5, 2), P_3(19/5, 1) y P_4 (22/5, 0)

5 a) $AB = DC = \sqrt{26}$; $BC = AD = \sqrt{10}$; $\hat{A} = \hat{C} = 60{,}3º$; $\hat{B} = \hat{D} = 119{,}7º$; es un paralelogramo.
b) $2\sqrt{5}$ y $2\sqrt{13}$ c) M (1, 1)

6 a) Vectorial: (x, y) = (4, 5) + λ (6, 1) Paramétricas: $x = 4 + 6\lambda$
$y = 5 + \lambda$

Continua: $\frac{x-4}{6} = y - 5$ General o implícita: x – 6y + 26 = 0

Explícita: $y = \frac{x}{6} + \frac{13}{3}$ Punto-pendiente: $y - 5 = \frac{1}{6}(x-4)$

b) $y - 2 = \frac{1}{6}(x-1)$ c) 6x + y + 5 = 0 d) y – 5 = -2 (x – 4)

7 a) Verdadero, pues 4/10 = 2/5, que es la pendiente de la recta.
b) Verdadero, ya que ambas tienen la misma pendiente.
c) Falso, pues las coordenadas (1, 0) no verifican la ecuación de la recta dada.
d) Falso, ya que sus pendientes no cumplen la relación m' = -1/m.
e) Verdadero, ya que las coordenadas (-1, 0) verifican la ecuación de la recta.

8 a) Sí pertenece b) No pertenece; sí pertenece (0, -1) c) Sí pertenece

9 a) Vectorial: (x, y) = (0, 7) + λ (1, 2) Paramétricas: $x = \lambda$
$y = 7 + 2\lambda$

Continua: $x = \frac{y-7}{2}$ General o implícita: 2x – y + 7 = 0

Explícita: $y = 2x + 7$ Punto-pendiente: $y - 7 = 2x$

$\vec{d} = (1, 2)$; A (0, 7) y B (1, 9) ; m = 2

b) Vectorial: (x, y) = (0, 4) + λ (1, 3) Paramétricas: $x = \lambda$, $y = 4 + 3\lambda$

Continua: $x = \dfrac{y-4}{3}$ General o implícita: $3x - y + 4 = 0$

Explícita: $y = 2x + 7$ Punto-pendiente: $y - 4 = 3x$

$\vec{d} = (1, 3)$; A (0, 4) y B (-1, 1) ; m = 3

c) Vectorial: (x, y) = (2, 0) + λ (- 1, 4) Paramétricas: $x = 2 - \lambda$, $y = 4\lambda$

Continua: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y}{4}$ General o implícita: $4x + y - 8 = 0$

Explícita: $y = -4x + 8$ Punto-pendiente: $y = -4(x - 2)$

$\vec{d} = (-1, 4)$; A (2, 0) y B (1, 4) ; m = - 4

d) Vectorial: (x, y) = (- 1, 2) + λ (-1, 3) Paramétricas: $x = -1 + 2\lambda$, $y = 2 + 3\lambda$

Continua: $\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$ General o implícita: $3x + y + 1 = 0$

Explícita: $y = -3x - 1$ Punto-pendiente: $y - 2 = -3(x + 1)$

$\vec{d} = (-1, 3)$; A (- 1, 2) y B (0, -1) ; m = - 3

e) Vectorial: (x, y) = (- 2, 3) + λ (-1, 6) Paramétricas: $x = -2 - \lambda$, $y = 3 + 6\lambda$

Continua: $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-3}{6}$ General o implícita: $6x + y + 9 = 0$

Explícita: $y = -6x - 9$ Punto-pendiente: $y - 3 = -6(x + 2)$

$\vec{d} = (-1, 6)$; A (-2, 3) y B (0, - 9) ; m = - 6

f) Vectorial: (x, y) = (0, 5) + λ (-2, 3) Paramétricas: $x = -2\lambda$, $y = 5 + 3\lambda$

Continua: $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-5}{3}$ General o implícita: $3x + 2y - 10 = 0$

Explícita: $y = -\dfrac{3}{2}x + 5$ Punto-pendiente: $y - 5 = -\dfrac{3}{2}x$

$\vec{d} = (-2, 3)$; A (0, 5) y B (-2, 8) ; m = - 3/2

10 a) $3x + y - 4 = 0$ b) $x - 3y = 0$ c) $\dfrac{11}{\sqrt{10}}$ u

11 a) Son secantes; se cortan en el punto P (-3/2, -6) y forman un ángulo de 12,53º.
b) Son paralelas.
c) Son secantes; se cortan en el punto P (17/4, -5) y forman un ángulo de 75,96º.

12 a) $\frac{19}{\sqrt{26}}$ u b) $\frac{21}{\sqrt{10}}$ u c) $\frac{15}{\sqrt{13}}$ u d) 0

13 a) Cualquiera que no sea paralela; por ejemplo, x + y + 6 = 0.
b) Cualquiera con pendiente m = - 1/6; por ejemplo, x + 6y + 3 = 0.
c) Cualquier recta cuyos vectores de dirección sean paralelos a (-1, 3); por ejemplo, $\frac{x-9}{-1}=\frac{y+5}{3}$.
d) Hay infinitas; una de ellas es y – 4 = 3 (x + 5).
e) Basta con cambiar la pendiente: y – 4 = -2 (x + 5).