ÁLGEBRA LINEAL - Ejercicios de Selectividad

1 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) ¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial A X + 2 B = 3 C?
(b) Resuelve la ecuación matricial dada para m = 1.

2 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de m para los que la matriz A + m I no tiene inversa.
(b) Resuelve el sistema A X = 3 X.

3 Sean C_1, C_2 y C_3 las columnas primera, segunda y tercera de una matriz cuadrada de orden 3 cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:
(a) el determinante de A^3.
(b) el determinante de A^{-1}.
(c) el determinante de 2A.
(d) el determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son $3\,C_1 - C_3$, $2\,C_3$ y C_2.

4 Del sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

$$ax + by + 1 = 0$$
$$a'x + b'y + c = 0$$

se sabe que x = 1, y = 2 es una solución y que x = 7, y = 3 es otra solución. ¿Qué puede afirmarse respecto de las soluciones del sistema? ¿Cuántas son? ¿Cuáles son?

5 (a) Sean A y B dos matrices cuadradas del mismo orden que tienen inversa. Razona si su producto A B tiene inversa.
(b) Dadas las matrices

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

determina si C D tiene inversa y, en ese caso, hállala.

6 (a) Dada esta matriz, halla los valores de m para los que no tiene inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

(b) Tomando m = 1, resuelve el sistema escrito en forma matricial

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

calcula $(A^t A^{-1})^2 A$.

8 Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} 3x + 2y - 5z = 1 \\ 4x + y - 2z = 3 \\ 2x - 3y + az = b \end{array}$$

(a) Determina a y b sabiendo que el sistema tiene infinitas soluciones.
(b) Resuelve el sistema resultante.

9 Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & b & 3 \\ 4 & 1 & -b \end{pmatrix}$$

(a) Determina para qué valores del parámetro b existe A^{-1}.
(b) Calcula A^{-1} para b = 2.

10 Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

calcula los siguientes determinantes y enuncia las propiedades que utilices:

(a) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 15c \\ d & e & 5f \\ g & h & 5i \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a+2b & c & b \\ d+2e & f & e \\ g+2h & i & h \end{vmatrix}$

11 Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} mx + 2y = 3 \\ -x + 2mz = -1 \\ 3x - y - 7z = m + 1 \end{array}$$

(a) Halla todos los valores del parámetro m para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.
(b) Resuelve el sistema para los valores de m del apartado anterior.
(c) Discute el sistema para los restantes valores de m.

12 Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

(a) Halla los valores de x e y tales que AX = U.
(b) Halla la matriz A^{-1} y calcula A^{-1} U.

13 Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{gathered} x + my + (m - 1)z = 1 \\ y + z = 1 \\ 2x + y - z = -3 \end{gathered}$$

(a) Halla todos los posibles valores del parámetro m para los que el sistema correspondiente tiene al menos dos soluciones distintas.
(b) Resuelve el sistema para los valores de m obtenidos en el apartado anterior.
(c) Discute el sistema para los restantes valores de m.

14 Discute y resuelve el siguiente sistema según los valores de m:

$$\begin{gathered} x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{gathered}$$

15 Resuelve la ecuación matricial A^2 X = 2 B, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

16 Considera el sistema de ecuaciones escrito en forma matricial

$$\begin{pmatrix} b & 1 & b \\ 0 & b & 1 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(a) Discute el sistema según los valores del parámetro b.
(b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

17 Un mayorista de café dispone de tres tipos base (Moka, Brasil y Colombia) para preparar tres tipos de mezcla A, B y C, que envasa en sacos de 60 Kg, con los siguientes contenidos en Kg y precios del Kg en euros:

	Mezcla A	Mezcla B	Mezcla C
Moka	15	30	12
Brasil	30	10	18
Colombia	15	20	30
Precio (por Kg)	4	4,5	4,7

Suponiendo que el preparado de las mezclas no supone coste alguno, ¿cuál es el precio de cada uno de los tipos base de café?

18 (a) Si todos los elementos de una matriz de orden 3 x 3 se multiplican por (-1), ¿qué relación hay entre los determinantes de la matriz original y de la nueva matriz?
(b) ¿Y si se multiplican por (-2)?
(c) Indica una de las propiedades de los determinantes que hayas utilizado en la resolución de los apartados anteriores.

19 Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcula $A^t A$ y $A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.
(b) Siendo X una matriz columna, discute y, en su caso, resuelve la ecuación matricial

$$A^t A X = m X$$

según los valores del parámetro real m.

20 Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$$

donde a, b y c son no nulos.
(a) Determina el número de columnas linealmente independientes.
(b) Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

21 Clasifica el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro real m:

$$\begin{aligned} 5x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ 4x - y + m^2 z &= m - 1 \end{aligned}$$

22 Sea

$$A = \begin{pmatrix} sen\, x & -\cos x & 0 \\ \cos x & sen\, x & 0 \\ sen\, x + \cos x & sen\, x - \cos x & 1 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de x existe la matriz inversa de A? Calcula dicha matriz inversa.

23 Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$.

(a) ¿Para qué valores del parámetro k no existe la inversa de la matriz A? Justifica la respuesta.
(b) Para k = 0, resuelve la ecuación matricial $(X + I) \cdot A = A^t$, donde I denota la matriz identidad y A^t la matriz traspuesta de A.

24 Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + z &= \lambda + 1 \\ 3y + 2z &= 2\lambda + 3 \\ 3x + (\lambda - 1)\, y + z &= \lambda \end{aligned}$$

(a) Resuelve el sistema para λ = 1.
(b) Halla los valores de λ para los que el sistema tiene una única solución.
(c) ¿Existe algún valor de λ para el que el sistema admite la solución (-1/2 0, 1/2)?

25 Considera el siguiente sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{aligned} kx + 2y &= 2 \\ 2x + ky &= k \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

(a) Prueba que el sistema es compatible para cualquier valor del parámetro k.
(b) Especifica para qué valores del parámetro k es determinado y para cuáles indeterminado.
(c) Halla las soluciones en cada caso.

26 Considera el sistema de ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} x - y &= \lambda \\ 2\lambda y + \lambda z &= \lambda \\ -x - y + \lambda z &= 0 \end{aligned}$$

(a) Clasifícalo según los distintos valores del parámetro λ.
(b) Resuélvelo para λ = 0 y para λ = -1.

27 Sea M = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{pmatrix}$.

(a) Determina los valores de m para los que los vectores fila de M son linealmente independientes.
(b) Estudia el rango de M según los valores de m.
(c) Para m = 1, calcula la inversa de M.

28 Sea A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Comprueba que $A^2 = 2I$ y calcula A^{-1}.
(b) Calcula A^{2013} y su inversa.

SOLUCIONES

1 a) $m \neq 0$ b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

2 a) m = ± 3 b) $X = \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$

3 a) 125 b) 1/5 c) 40 d) -30

4 El sistema tiene infinitas soluciones, y son de la forma (6λ - 11, λ)

5 a) $(A\,B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ b) Sí. La inversa es $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 3/4 \end{pmatrix}$

6 a) m = 0 y m = 1 b) x = λ ; y = -λ ; z = λ **7** $(A^t A^{-1})^2 A = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

8 a) a = 44/5 ; b = 5 b) (1 - λ/5, -1 +14λ/5, λ)

9 a) $b \neq 1$ y $b \neq 3$ b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

10 a) 30 b) -2

11 a) m = 1 b) $x = \lambda$; $y = \dfrac{3-\lambda}{2}$; $z = \dfrac{\lambda - 1}{2}$
c) Para m = 7, el sistema es incompatible**.** Para $m \neq 1$ y $m \neq 7$, es compatible determinado.

12 a) x = 3 ; y = -1 b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; $A^{-1}\,U = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

13 a) m = 3 b) x = -2 + λ ; y = 1 - λ ; z = λ
c) Para $m \neq 3$, el sistema es incompatible.

14 - Para m = 1, el sistema es compatible indeterminado. Su solución es (λ, μ, -λ - μ).
- Para m = -2, el sistema es también compatible indeterminado. Su solución es (λ, λ, λ)**.**
- Para $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el sistema es compatible determinado y tiene, al ser

homogéneo, la solución trivial (x = y = z = 0).

15 $X = \begin{pmatrix} 14 & -26 & 52 \\ 8 & -14 & 30 \end{pmatrix}$

16 a) Si b = 1, el sistema es compatible indeterminado. Si b = -1, el sistema es incompatible. Si $b \neq \pm 1$, el sistema es compatible determinado.
b) Para b = 1, la solución del sistema es de la forma (-2, λ, -λ)

17 Colombia: 6 euros/Kg Brasil: 3 euros/Kg Moka: 4 euros/Kg

18 a) El determinante cambia de signo.
b) El determinante queda multiplicado por -8.
c) Cuando se multiplica una línea (fila o columna) de un determinante por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.

19 a) $A^t \bullet A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A \bullet A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) Para m = 1, el sistema resultante es compatible indeterminado y su solución es de la forma (0, λ, 0).
Para m = 0, el sistema es compatible indeterminado y su solución es (-λ, 0, λ)
Para m = 2, el sistema es compatible indeterminado, con solución (λ, 0, λ)
Para m distinto de los valores anteriores, el sistema es compatible determinado y su solución es la trivial (x = y = z = 0).

20 a) Tiene dos columnas linealmente independientes.
b) rg (A) = 2. No tiene inversa, ya que |A| = 0.

21 Para m = 1, el sistema es compatible indeterminado. Para m = -1, el sistema es incompatible. Para $m \neq \pm 1$, el sistema es compatible determinado.

22 Existe para todos los valores de x. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \text{sen } x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \text{sen } x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

23 a) k = 1/2 b) $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

24 a) $\left(\frac{1-z}{3}, \frac{5-2z}{3}, z\right)$ b) $\lambda \neq 1$ c) Sí, ocurre para λ = -1

25 a) Sí, porque rg (A) = rg (A*) para cualquier valor de k.

b) Para k = -2 es indeterminado, y para $k \neq -2$ es determinado.

c) Para k = -2: (λ, λ - 1) Para k …-2: x = 0 e y = 1

26 a) Para λ = 0, el sistema es compatible indeterminado.
Para λ = -1, el sistema también es compatible indeterminado.
Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$, el sistema es compatible determinado.
b) Para λ = 0: (0, 0, k) Para λ = -1: (-1+k, k, 1 - 2k)

27 (a) Para $m \neq 0 \quad y \quad m \neq -1$.
(b) Si m = 0, rg(M) = 2; si m = -1, rg(M) = 2; si m es distinto de 0 y de -1, rg(M) = 3.
(c) $M = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$

28 (a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

(b) $A^{2013} = \begin{pmatrix} 2^{1006} & 2^{1006} \\ 2^{1006} & -2^{1006} \end{pmatrix}$; $(A^{2013})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2^{1007} & 1/2^{1007} \\ 1/2^{1007} & -1/2^{1007} \end{pmatrix}$