# VECTORES, RECTAS Y PLANOS

**1** Dados los vectores $\vec{u} = (1, 0, -3)$, $\vec{v} = (-2, 1, 1)$ y $\vec{w} = (3, 0, 1)$:
a) Determina si son linealmente independientes.
b) Encuentra un vector ortogonal a $\vec{u}$ y de módulo 3.
c) Halla el ángulo que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
d) Expresa el vector (11, -1, -7) como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

**2** Con los vectores anteriores, efectúa las siguientes operaciones:
a) $(3\vec{u} \cdot \vec{v})\, \vec{w}$
b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\, \vec{u}$
c) $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$
d) $(\vec{v} \times \vec{u})\, (\vec{u} \cdot \vec{v})$

**3** Un triángulo tiene por vértices los puntos A (0, 2, 3), B (1, 1, 2) y C (2, 0, -1).
a) Halla la medida de sus lados y el valor de sus ángulos. Con esta información, clasifica el triángulo.
b) Calcula su área, utilizando el cálculo vectorial.

**4** Dados los puntos A (3, 1, 0), B (-1, 1, -1) y C (2, 0, k):
a) Determina k para que los tres puntos estén alineados.
b) Determina k para que los tres puntos pertenezcan al mismo plano que el punto D (2, 0, -1).

**5** Sean los puntos A (3, 2, 0) y B (-1, 1, 5).
a) Halla la recta que pasa por ellos y exprésala en todas sus formas.
b) Calcula una recta perpendicular a la anterior que pase por el punto medio del segmento AB. ¿Cuántas rectas de estas características hay?

**6** Dada la recta r : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$
a) Calcula dos puntos que pertenezcan a r.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a esta recta y al punto (1, 1, 1).
c) Determina la recta perpendicular al plano anterior que pasa por el punto (3, 3, -1).

**7** Calcula, cuando sea única, la ecuación del plano que verifica las siguientes condiciones. Si existe más de uno, justifícalo.
a) Pasa por el punto A (1, 1, 0) y es perpendicular a la recta r: $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$
b) Pasa por los puntos A (0, 0, 0) y B (3, 2, 1).
c) Contiene a la recta r: $\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 3 - 3\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ y al punto A (0, 0, -1).
d) Es perpendicular al plano $\pi : 2x - y + 3z + 5 = 0$ y pasa por B (1, 0, 1).

**8** Halla la posición relativa de estas parejas de recta y plano:

a) r: $x = 3 - \lambda$
$y = 2\lambda$
$z = -1 + \lambda$

$\pi$: $x - y + 3z + 8 = 0$

b) r: $x - y + z = 0$
$2x + y - z + 1 = 0$

$\pi$: $3x + y + 2 = 0$

**9** Estudia la posición relativa de los siguientes conjuntos de planos:

a) $\pi$: $3x - y + 2z + 1 = 0$ $\pi'$: $x = 3\lambda - \mu$
$y = 1 + \lambda$
$z = 2\mu$

b) $\pi$: $2x + 2y - z + 7 = 0$
$\pi'$: $x + y - z + 5 = 0$
$\pi''$: $4x + 4y - z + 2 = 0$

c) $\pi$: $x + y + 2z - 4 = 0$
$\pi'$: $2x - y + z - 5 = 0$
$\pi''$: $x + 2y - z + 3 = 0$

d) $\pi$: $x + y + z + 6 = 0$ $\pi'$: $x = 2 + \lambda$
$y = 1 + \mu$
$z = 3 - \lambda - \mu$

$\pi''$: $2x + 2y + 2z - 9 = 0$

**10** Determina la posición relativa de estos pares de rectas:

a) r: $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{2}$ s: $x = 1 - \lambda$
$y = 2\lambda$
$z = 1 + 2\lambda$

b) r: $2x + y - z + 5 = 0$
$3x - y + z - 5 = 0$

s: $y + 2z = 4$
$2x - z = -3$

c) r: $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$ s: $x = \lambda$
$y = \lambda$
$z = 1 + 3\lambda$

d) r: $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-3}{-1}$ s: $\dfrac{x-8}{4} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{-2}$

## SOLUCIONES

**1** a) Son linealmente independientes.
b) Hay infinitos vectores ortogonales y de módulo 3; uno puede ser (0, 3, 0).
c) $\alpha = \arccos \frac{-5}{\sqrt{6} \bullet \sqrt{10}} = 130{,}2^{\circ}$ d) $\frac{27}{10}\vec{u} - \vec{v} + \frac{21}{10}\vec{w}$

**2** a) (-45, 0, -15) b) (10, 0, -30) c) (5, 0, -15) d) (15, 25, 5)

**3** a) $AB = \sqrt{3}\,u$ ; $AC = \sqrt{24}\,u$ ; $BC = \sqrt{11}$ ; $\hat{A} = 19{,}5^{\circ}$ ; $\hat{B} = 150{,}5^{\circ}$ ; $\hat{C} = 10^{\circ}$
El triángulo es escaleno y obtusángulo.
b) $\sqrt{2}\ u^2$

**4** a) No es posible conseguir que los tres estén alineados.
b) k = -1 (en este caso, coinciden los puntos C y D)

**5** a) La recta es x = 3 - 4$\lambda$ ; y = 2 - $\lambda$ ; z = 5$\lambda$.
b) Hay infinitas rectas con esas características, una es: x = 1 + $\lambda$ ; y = 3/2 - 4$\lambda$ ; z = 5/2.

**6** a) A (0, 3, 4) y B (1, 2, 1)
b) x = 1 + $\lambda$ ; y = 2 - $\lambda$ + $\mu$ ; z = 1 - 3$\lambda$ $\rightarrow$ 3x + z – 4 = 0
c) x = 3 + 3$\lambda$ ; y = 3 ; z = -1 + $\lambda$

**7** a) 3x + 9y – 2z – 12 = 0 b) Hay infinitos
c) x = 2 + $\lambda$ + 2$\mu$ ; y = 3 - 3$\lambda$ + 3$\mu$ ; z =1 + $\lambda$ + 2$\mu$ d) Hay infinitos

**8** a) La recta es paralela al plano. b) Se cortan en el punto (-1, 1, 0).

**9** a) Los dos planos son secantes. b) Se cortan dos a dos (prisma).
c) Se cortan en el punto (1, -1, 2). d) Son paralelos.

**10** a) Las rectas son paralelas. b) Se cortan en el punto (0, -2, 3).
c) Las rectas se cruzan. d) Las rectas son paralelas.