GEOMETRÍA ANALÍTICA - Ejercicios de Selectividad

1 Se sabe que los puntos A (1,0,-1), B (3, 2, 1) y C (-7, 1, 5) son los vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD.
(a) Calcula las coordenadas del punto D.
(b) Halla el área del paralelogramo.

2 Los puntos A (1, 1, 0) y B (2, 2, 1) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. Además, se sabe que los vértices C y D están contenidos en una recta que pasa por el origen de coordenadas. Halla C y D.

3 Sabiendo que las rectas

$$r: \quad x = y = z \qquad y \qquad s: \quad \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

se cruzan, halla los puntos A y B, de r y s respectivamente, que están a mínima distancia.

4 Determina el punto P de la recta

$$r: \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$$

que equidista de los planos

$$\pi_1: \quad x + y + z + 3 = 0 \qquad y \qquad \pi_2: \quad \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

5 Considera los puntos A (2, -1, -2) y B (-1, -1, 2).
(a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos iguales.
(b) Encuentra un punto C sobre la recta r de ecuaciones

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.

6 Un punto M se mueve en el espacio tridimensional de manera que en un instante de tiempo t se encuentra en el punto (1 + t, 3 + t, 6 + 2t).
(a) ¿Es esta trayectoria una línea recta? Si es así, escribe sus ecuaciones de dos formas distintas.
(b) Halla el instante de tiempo en el que el punto está en el plano dado por la ecuación x - 2y + z - 7 = 0.
(c) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a la trayectoria de M y pasa por el punto (1, 1, 0).

7 Los puntos A (3, 3, 5) y B (3, 3, 2) son vértices consecutivos de un rectángulo ABCD. El vértice C consecutivo de B está en la recta de ecuación

$$x = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

(a) Determina el vértice C.
(b) Determina el vértice D.

8 Calcula el punto de la recta de ecuaciones

$$x-1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}$$

más cercano al punto A (1, -1, 1).

9 Halla la distancia entre el origen de coordenadas y la recta de intersección de los planos de ecuaciones x + y + 2z = 4 y 2x - y + z = 2.

10 Calcula las coordenadas del punto simétrico del (1, -3, 7) respecto de la recta dada por las ecuaciones

$$x-1 = y+3 = \frac{z-4}{2}$$

11 Halla las ecuaciones de la recta que se apoya perpendicularmente en las rectas r y s definidas respectivamente por

$$x-1 = y-2 = \frac{z-1}{-2} \qquad \frac{x-4}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2}$$

12 Calcula el volumen de un cubo sabiendo que dos de sus caras están, respectivamente, en los planos 2x - 2y + z - 1 = 0 y 2x - 2y + z - 5 = 0.

13 Halla las coordenadas del punto simétrico del punto P (1, 2, -2) respecto al plano de ecuación 3x + 2y + z - 7 = 0.

14 Determina los puntos de la recta de ecuaciones

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{2}$$

que equidistan de los planos 3x + 4y - 1 = 0 y 4x - 3z - 1 = 0.

15 Halla la ecuación del plano cuyo punto más próximo al origen es (-1, 2, 1).

16 Considera el plano 2x + 2y + z + 7 = 0, la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$$

y el punto A (1, 5, -4).
(a) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, hállalo, un punto B de la recta tal que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela al plano.
(b) Determina razonadamente si existe y, en ese caso, hállalo, un punto C de la recta

tal que la recta que pasa por A y C sea perpendicular al plano.

17 Prueba que todos los planos de la familia

$$(3 + m)\,x + (3 - m)\,y + (5 - 2m)\,z = m$$

(con m un número real) contienen una misma recta y halla unas ecuaciones paramétricas de dicha recta.

18 Halla el punto del plano de ecuación $x - z = 3$ que está más cerca del punto P (3, 1, 4), así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

19 De todos los planos que contienen a la recta r dada por

$$x - 4y + 9 = 0$$
$$3y - z - 9 = 0$$

(a) determina el que pasa por el punto P (1, 4, 0);
(b) determina uno que esté a 3 unidades de distancia del origen. ¿Cuántas soluciones hay?

20 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A (1, 0, -1), es perpendicular al plano $x - y + 2z + 1 = 0$ y es paralelo a la recta

$$x - 2y = 0$$
$$z = 0$$

21 Halla el punto simétrico de P (2, 1, -5) respecto de la recta r definida por

$$x - z = 0$$
$$x + y + 2 = 0$$

22 Sean los puntos A (0, 0, 1), B (1, 0, -1), C (0, 1, -2) y D (1, 2, 0).
(a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
(b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
(c) Calcula la distancia del punto D al plano π.

23 De un paralelogramo ABCD conocemos tres vértices consecutivos: A (2, -1, 0), B (-2, 1, 0) y C (0, 1, 2).
(a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
(b) Halla el área de dicho parelelogramo.
(c) Calcula el vértice D.

24 Sean r y s las rectas dadas por

$$r \equiv x + y - z = 6 \qquad\qquad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$$
$$x + z = 3$$

(a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
(b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

25 Sea r la recta que pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene como vector de dirección (a, 2a, 1) y sea s la recta dada por

$- 2x + y = - 2$

$- ax + z = 0$

(a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.

(b) Calcula, para a = 1, la distancia entre r y s.

26 Considera los puntos P (2, 3, 1) y Q (0, 1, 1).

(a) Halla la ecuación del plano respecto del cual P y Q son simétricos.

(b) Calcula la distancia de P al plano anterior.

SOLUCIONES

1 a) D (-9, -1, 3) b) Área = $\sqrt{1208}$ u^2

2 C (5/3, 5/3, 5/3) y D (2/3, 2/3, 2/3) **3** P_r (1, 1, 1) y P_s (0, 2, 1)

4 P (-1, -2, -3)

5 a) P (1, -1, -2/3) y Q (0, -1, 2/3) b) C (4/3, 2/3, 5/3) y C' (1/2, 3/2, 0)

6 a) Sí es una recta (t es el parámetro). Una forma es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-6}{2}$

b) t = 6 c) r: x = 1 + 7λ ; y = 1 + λ ; z = -4λ

7 a) C (3/2, 9/2, 2) b) D (3/2, 9/2, 5) **8** P (5/7, -18/7, -1/7)

9 d(O, r) = $\sqrt{8/3}$ u **10** P (3, -1, 5)

11 t : x = 1 + 2λ ; y = 2 ; z = 1 + λ **12** l = 4/3 6 V = 64/27 u^3

13 P' (13/7, 18/7, -12/7) **14** P_1 (19/8, 17/16, -5/8) y P_2 (3/10, -41/20, -27/10)

15 π : x - 2y - z + 6 = 0 **16** a) B (10/9, 20/9, 4/3) b) No existe C

17 Se trata de un haz de planos secantes: 3x + 3y + 5z + m (x - y - 2z - 1) = 0
La recta en paramétricas sería: r : x = 1/2 + λ ; y = -1/2 -11λ ; z = 6λ

18 P' (5, 1, 2) ; d (P, π) = $2\sqrt{2}$ u

19 a) x + 2y - 2z - 9 = 0
b) Hay dos planos, que son: π_1 : x + 2y - 2z - 9 = 0 y π_2 : x + 8y - 4z - 27 = 0

20 π : 2x - 4y - 3z - 5 = 0 **21** P' (-6, -1, 1)

22 a) π : 2x + 3y + z - 1 = 0 b) 2 + 6 + 0 - 1 ... 0 No pertenece al plano

c) d (D, π) = $\frac{7}{\sqrt{14}}$ u

23 a) $r \equiv x-1=\frac{y}{2}=1-z$ b) Área = $\sqrt{6}\ u^2$ c) D (4, -1, 2)

24 a) El punto de corte es (-1, 11, 4). b) π : 2x - y + 4z - 3 = 0

25 (a) a = 1 (b) 1 u **26** (a) π : x + y - 3 = 0 (b) $\sqrt{2}$ u