ANÁLISIS (Selectividad)

1 Sea f : R → R la función definida por $f(x) = \ln(x^2+1)$.
(a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).
(b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de inflexión de abscisa negativa.

2 Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ xe^{-x^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Estudia la derivabilidad de f en $x = 0$ y, si es posible, calcula la derivada de f en dicho punto.

3 Calcula $\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$.

4 Sea f : R → R la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{a}{x} & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x^2 + 1 & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

(a) Halla el valor de a sabiendo que f es continua.
(b) Esboza la gráfica de f.

5 Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.
(a) Estudia la derivabilidad de f.
(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) Calcula los extremos relativos de f (puntos donde se alcanzan y valor de la función).

6 Un alambre de longitud 1 metro se divide en dos trozos, con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcula las longitudes de los dos trozos para que la suma de las áreas de ambos recintos sea mínima.

7 Halla la función f : R → R sabiendo que $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ tiene de ecuación $4x - y - 7 = 0$.

8 Se sabe que

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \alpha \operatorname{sen} x}{x^2}$$

existe y es finito. Determina el valor de α y calcula el límite.

9 Sea *f* la función definida por $f(x) = \dfrac{x^4+3}{x}$, $x \neq 0$.

(a) Halla, si existen, los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de la gráfica de *f*.
(b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de *f*.
(c) Esboza la gráfica de *f*.

10 Sea *f* : R → R la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

(a) Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de *f*.
(b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función *f*.
(c) Esboza la gráfica de *f*.

11 Sea *f* : (1,+∞) → R la función dada por

$$f(x) = \frac{x\,(\ln x)^2}{(x-1)^2}$$

Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, hállala.

12 Se sabe que la función *f* : [0, 5] → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ -4 + \sqrt{x-1} & \text{si } 2 \le x \le 5 \end{cases}$$

es derivable en el intervalo (0, 5).
(a) Calcula las constantes *a* y *b*.
(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 2$.

13 Sea *f* : R → R la función definida por $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + 1$.
(a) Determina *a y b* sabiendo que la gráfica de *f* pasa por el punto (2, 2) y tiene un punto de inflexión de abscisa $x = 0$.
(b) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de *f* en el punto de inflexión.

14 Se desea construir una lata de conserva en forma de cilindro circular recto que tenga una superficie total de 200 cm^2. Determina el radio de la base y la altura de la lata para que el volumen sea máximo.

15 Se quiere construir un depósito en forma de prisma de base cuadrada sin tapadera que tenga una capacidad de 500 m^3. ¿Qué dimensiones ha de tener para que su superficie sea mínima?

16 Sea la función f: R → R definida por $f(x) = e^x (x - 2)$.
(a) Calcula las asíntotas de f.
(b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
(c) Determina, si existen, los puntos de inflexión de la gráfica de f.

17 Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{a\cdot \operatorname{sen} x - x e^x}{x^2}$ es finito, calcula el valor de a y el de dicho límite.

18 Sea la función continua f: R → R definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \le 0 \\ \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de k.
(b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = 1.

19 Sea la función f definida por $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1 - x}$ para $x \neq 1$.
(a) Estudia las asíntotas de la gráfica de la función f.
(b) Halla los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

20 Sea f: (- ∞, 1) → R la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2e^{-x} & \text{si } x \le 0 \\ a\sqrt{b - x} & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

(a) Determina a y b sabiendo que f es derivable en todo su dominio.
(b) Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

21 Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\cos x + b \operatorname{sen} x}{x^3}$ es finito, calcula b y el valor del límite.

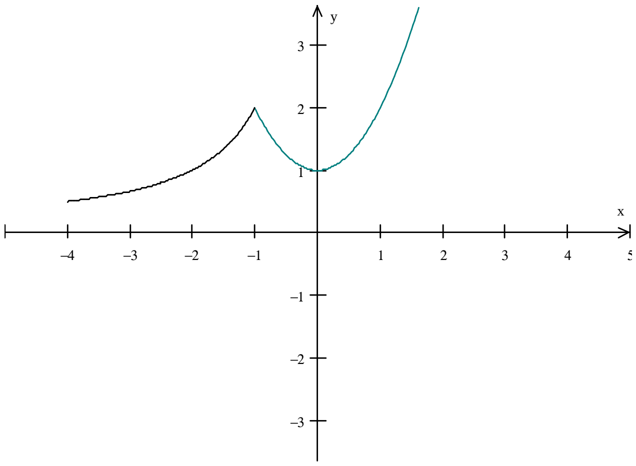
SOLUCIONES

1 a) Mínimo en (0, 0). Decreciente en (-∞, 0) y creciente en (0, +∞).
b) Puntos de inflexión (1, ln 2) y (-1, ln 2). Recta y = - x – 1 + ln 2.

2 Es derivable en x = 0 y f'(0) = 1.

3 1/2

4 a) a = 2
b)



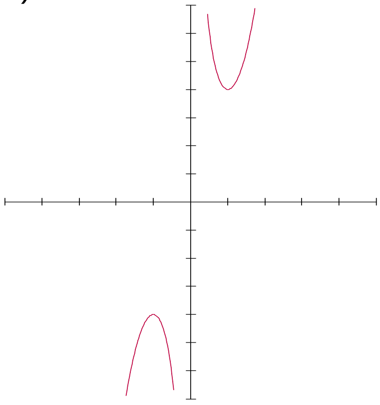
5 a) Es derivable en R – {0}.
b) Crece en (-1/2, 0) U (1/2, +∞). Decrece en (-∞, -1/2) U (0, 1/2)
c) Mínimos en los puntos (-1/2, -1/4) y (1/2, -1/4). Máximo en (0,0).

6 Los trozos miden $\frac{4}{\pi + 4}$ (cuadrado) y $\frac{\pi}{\pi + 4}$ (circunferencia).

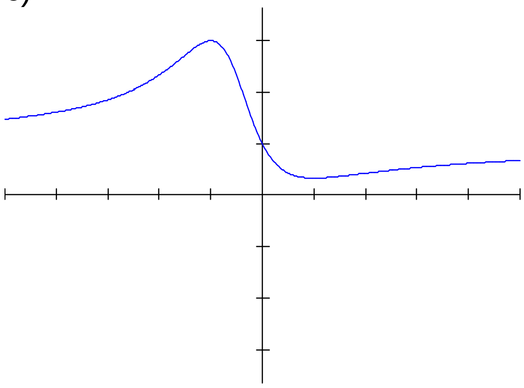
7 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 13$

8 α = 1; el límite vale 0.

9 a) No tiene puntos de corte con los ejes. Asíntota vertical en x = 0.
b) Creciente en (-∞, -1) U (1, +∞). Decreciente en (-1, 1) – {0}. Máximo en (-1, -4) y mínimo en (1, 4).
c)



10 a) Asíntota horizontal y = 1.
b) Crece en (-∞, -1) U (1, +∞). Decrece en (-1, 1). Máximo en (-1, 3) y mínimo en (1, 1/3).
c)



11 Asíntota horizontal por la derecha y = 0.

12 a) a = -7/2 ; b = 1   b) y = 1/2 x – 4

13 a) a = 0 ; b = -7/2   b) Tangente: y = -7/2 x + 1; normal: y = 2/7 + 1

14 Radio : $\frac{10}{\sqrt{3\pi}}$ cm ; altura: $\frac{20}{\sqrt{3\pi}}$ cm.

15 Base: 10 x 10 m^2 ; altura: 5 m

16 a) Tiene una asíntota horizontal por la izquierda: y = 0
No tiene asíntotas oblicua ni verticales.
b) Mínimo en el punto (1, - e). Decrece en (-∞, 1) y crece en (1, +∞).
c) Punto de inflexión en (0, -2).

17 a = 1. El límite vale -1.

18 a) k = 1   b) y = 2x – 3 + e

19 a) Asíntota horizontal por la derecha: y = 0
Asíntota vertical: x = 1 (+∞ por la izquierda y -∞ por la derecha)
No tiene asíntota oblicua.
b) Mínimo en el punto (0, 1). Decrece en (-∞, 0) y crece en (0, 1) U (1, +∞).

20 (a) a = 2 ; b = 1 ; (b) Recta tangente: y = - x + 2 ; recta normal: y = x + 2

21 b = -1 ; el límite vale -1/3