ÁLGEBRA CIENCIAS SOCIALES (Selectividad)

1 (a) Representa la región definida por las siguientes inecuaciones y determina sus vértices:

$$x + 3y \leq 12 \qquad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1 \qquad y \geq 1 \qquad x \geq 0$$

(b) Calcula los valores extremos de la función F(x,y) = 5x + 15y en dicha región e indica dónde se alcanzan.

2 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula A^2 y $2B + I_2$.
(b) Resuelve la ecuación matricial $A \cdot X - I_2 = 2B^2$.

3 Sea la igualdad A · X + B = A, donde A, B y X son matrices cuadradas de la misma dimensión.
(a) Despeja la matriz X de la igualdad anterior, sabiendo que A tiene inversa.
(b) Obtén la matriz X en la igualdad anterior, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4 (a) Dibuja el recinto definido por las siguientes restricciones:

$$x + y \geq 2 \qquad x - y \leq 0 \qquad y \leq 4 \qquad x \geq 0$$

(b) Determina el máximo y el mínimo de la función F(x, y) = x + y en el recinto anterior y los puntos donde se alcanzan.
(c) ¿Pertenece el punto (1/3, 4/3) al recinto anterior? Justifica la respuesta.

5 Un agricultor posee 10 hectáreas (ha.) de terreno y decide dedicarlas al cultivo de cereales y hortalizas. Por las limitaciones de agua, no puede dedicar más de 5 ha. a hortalizas. El cultivo de cereales tiene un coste de 1000 euros/ha y el de hortalizas de 3000 euros/ha, no pudiendo superar el coste total la cantidad de 16000 euros. El beneficio neto por ha. de cereales asciende a 2000 euros y el de hortalizas a 8000 euros. Halla la distribución de cultivos que maximiza el beneficio y calcula dicho máximo.

6 Obtén los valores máximo y mínimo, indicando los puntos donde se alcanzan, de la función objetivo F (x, y) = x – y en la región definida por las restricciones

$$6x + y \geq 3 \qquad 2x + y \leq 2 \qquad y \leq \frac{5}{4} \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

7 (a) Plantea, sin resolverlo, el siguiente problema de programación lineal:
Una empresa fabrica camisas de dos tipos, A y B. El beneficio que se obtiene es de 8 euros por cada camisa de tipo A y 6 euros por cada una del tipo B. La

empresa puede fabricar, como máximo, 100000 camisas, y las de tipo B han de suponer, al menos, el 60 % del total. ¿Cuántas camisas debe fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

(b) Representa la región definida por las inecuaciones

$$y \le x \qquad y + 2x \le 6 \qquad x \le 4y + 3$$

Calcula el máximo de F(x, y) = y + 2x en la región anterior e indique dónde se alcanza.

8 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula $C = B \cdot A - A^t \cdot B^t$.

(b) Halla la matriz X que verifica que $A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9 El estadio del Mediterráneo, construido para la celebración de los Juegos Mediterráneos Almería 2005, tiene una capacidad de 20000 espectadores. Los organizadores establecieron las siguientes normas: el número de adultos no debe superar el doble del de niños; el número de adultos menos el número de niños no será superior a 5000. Si el precio de la entrada de adulto es de 15 euros y de la de niño es de 10 euros, ¿cuál es la composición de espectadores que proporciona mayores ingresos? ¿A cuánto ascienden estos ingresos?

10 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$

(a) Halla el valor de x para que $A \cdot B = B \cdot A$.

(b) Calcula la matriz C tal que $A^t \cdot C = I_2$.

11 Una empresa monta dos tipos de ordenadores: fijos y portátiles. Puede montar como máximo 10 fijos y 15 portátiles a la semana, y dispone de 160 horas de trabajo semanales. El montaje de un fijo requiere 4 horas de trabajo y reporta un beneficio de 100 euros, mientras que cada portátil requiere 10 horas de trabajo y genera un beneficio de 150 euros. Calcula el número de ordenadores de cada tipo que deben montarse semanalmente para que el beneficio sea máximo, y halla dicho beneficio.

12 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula, si existe, la matriz inversa de B.

(b) Si $A \cdot B = B \cdot A$ y además $A + A^t = 3\, I_2$, calcula x e y.

13 Sea el recinto determinado por las siguientes inecuaciones:

$$y + 2x \ge 2; \quad 2y + 3x \ge -3; \quad 3y - x \le 6.$$

(a) Representa gráficamente dicho recinto.

(b) Calcula sus vértices.

(c) Obtén el valor mínimo de la función F(x, y) = 2x - y en el recinto anterior, así como dónde lo alcanza.

14 Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Resuelve la ecuación matricial $A.X + A^t = I_2$.
(b) ¿Qué requisitos mínimos debe de cumplir una matriz B para que pueda realizarse el producto AB?
(c) ¿Y para el producto 3BA?

15 Una fábrica produce dos tipos de productos, A y B, que distribuye a tres clientes. En el mes de enero el primer cliente compró 9 unidades de A y 5 de B, el segundo cliente 3 de A y 7 de B y el tercer cliente 4 de A y 6 de B. En el mes de febrero el primer cliente y el segundo duplicaron las compras del mes anterior y el tercer cliente compró de cada producto una unidad más de las que compró en enero. En marzo, el primer cliente no compró nada, y el segundo y el tercero compraron lo mismo que en febrero.
(a) Para cada mes construye la matriz de dimensión 3 x 2 correspondiente a las compras de ese mes.
(b) Calcula la matriz de compras del trimestre.
(c) Si los precios de los productos A y B son, respectivamente, 80 y 100 euros, calcula lo que factura la fábrica en el primer trimestre, por cada cliente y en total.

16 Un empresario fabrica camisas y pantalones para jóvenes. Para hacer una camisa se necesitan 2 metros de tela y 5 botones y para hacer un pantalón hacen falta 3 metros de tela, 2 botones y una cremallera. La empresa dispone de 1050 metros de tela, 1250 botones y 300 cremalleras. El beneficio que se obtiene por la venta de una camisa es de 30 euros y el de un pantalón es de 50 euros.
Suponiendo que se vende todo lo que se fabrica, calcula el número de camisas y pantalones que se deben confeccionar para poder obtener el máximo beneficio y determina este beneficio máximo.

17 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcula a y b sabiendo que $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Es A simétrica?

(b) Para los valores a = 3 y b = -1, halla la matriz X tal que $A \cdot B = 2(X - 3I_2)$.

18 Un fabricante de tapices dispone de 500 kg de hilo de seda, 400 kg de hilo de plata y 225 kg de hilo de oro. Desea fabricar dos tipos de tapices: A y B. Para los del tipo A se necesita 1 kg de hilo de seda y 2 kg de hilo de plata, y para los del tipo B, 2 kg de hilo de seda, 1 kg de hilo de plata y 1 kg de hilo de oro. Cada tapiz del tipo A se vende a 2000 euros y cada tapiz del tipo B a 3000 euros. Si se vende todo lo que se fabrica:
(a) ¿Cuántos tapices de cada tipo ha de fabricar para que el beneficio sea máximo y cuál es ese beneficio?
(b) ¿Qué cantidad de hilo de cada clase quedará cuando se fabrique el número de tapices que proporciona el máximo beneficio?

19 Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/4 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un número real cualquiera.
(a) Obtén la matriz A^{2014}.
(b) Para a = 2, resuelve la ecuación matricial $A^3 \cdot X - 4B = O$.

20 (a) Dadas las inecuaciones:

$$y \le x + 5$$
$$2x + y \ge -4$$
$$4x \le 10 - y$$
$$y \ge 0$$

representa el recinto que limitan y calcula sus vértices.
(b) Obtén el máximo y el mínimo de la función f(x,y) = x + y/2 en el recinto anterior, así como los puntos en los que se alcanza.

21 Sean las matrices A = $\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
(a) Calcula las matrices X e Y para las que se verifique

$$X + Y = A$$
$$3X + Y = B$$

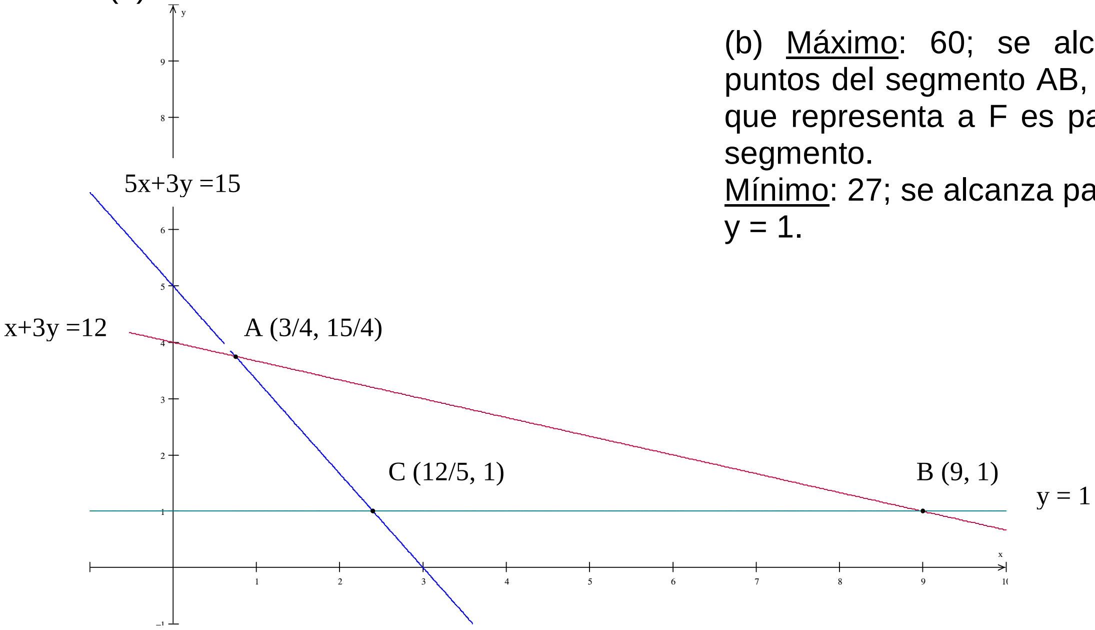
(b) Halla la matriz Z que verifica $B \cdot Z + B^t = 2I$.

22 (a) Plantea, sin resolverlo, el siguiente problema:
Un mayorista vende productos congelados que presenta en envases de dos tamaños, pequeños y grandes. La capacidad de sus congeladores no le permite almacenar más de 1000 envases en total. En función de la demanda sabe que debe mantener un stock mínimo de 100 envases pequeños y 200 envases grandes. La demanda de envases grandes es igual o superior a la de envases pequeños. El coste por almacenaje es de 10 céntimos de euro por cada envase pequeño y de 20 céntimos de euro por cada envase grande. ¿Qué número de envases de cada tipo proporciona el mínimo coste de almacenaje?
(b) Representa el recinto que determinan las inecuaciones:

$$2x \ge 10 + y \;\; ; \;\; x \le 2(5 - y) \;\; ; \;\; x \ge 0 \;\; ; \;\; y \ge 0$$

SOLUCIONES

1 (a)

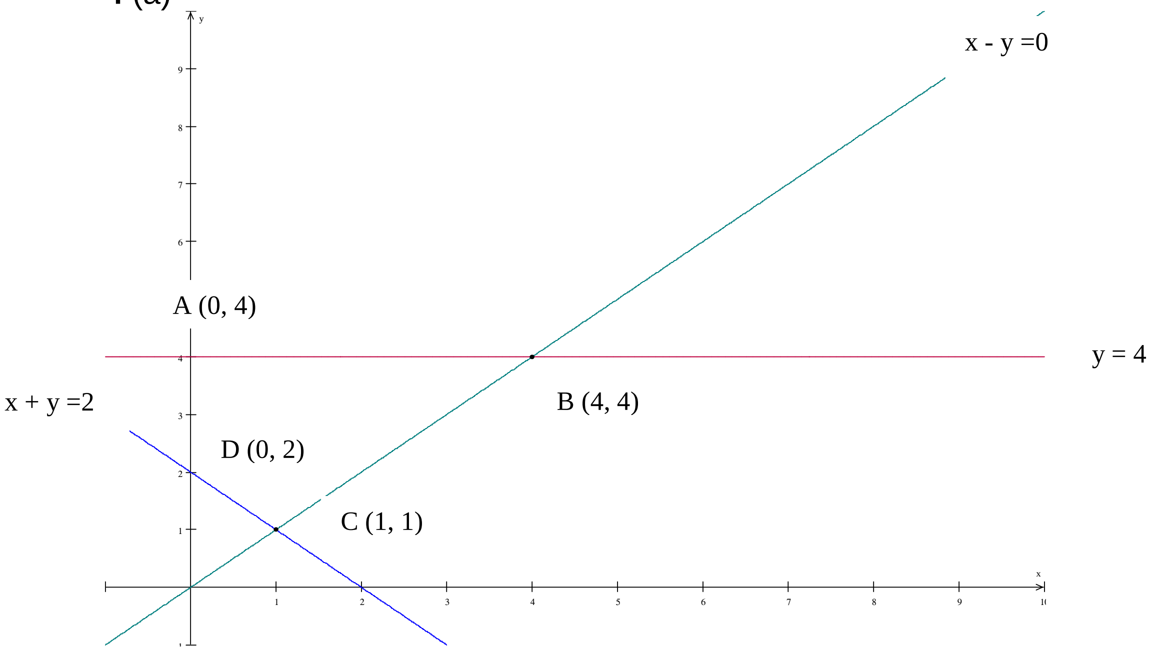


(b) Máximo: 60; se alcanza en los puntos del segmento AB, pues la recta que representa a F es paralela a este segmento.
Mínimo: 27; se alcanza para x = 12/5 e y = 1.

2 (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; $2B + I = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 13 & 17/2 \\ -4 & 1/2 \end{pmatrix}$

3 (a) $X = A^{-1}(A - B)$; b) $X = \begin{pmatrix} -4 & 19 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

4 (a)

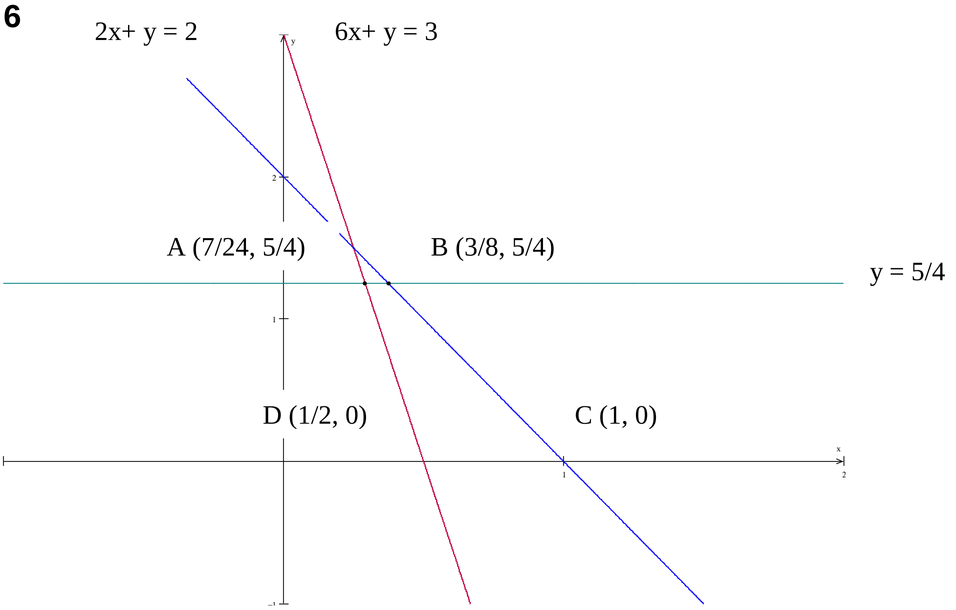


(b) Máximo: 8; se alcanza para x = 4 e y = 4.
Mínimo: 2; se alcanza para cualquier punto del segmento DC, pues la recta que representa la función objetivo es paralela a dicho segmento.

(c) No pertenece, pues no verifica la primera restricción (si sumamos 1/3 y 4/3, el resultado es inferior a 2).

5 5 hectáreas de hortalizas y 1 hectárea de cereales

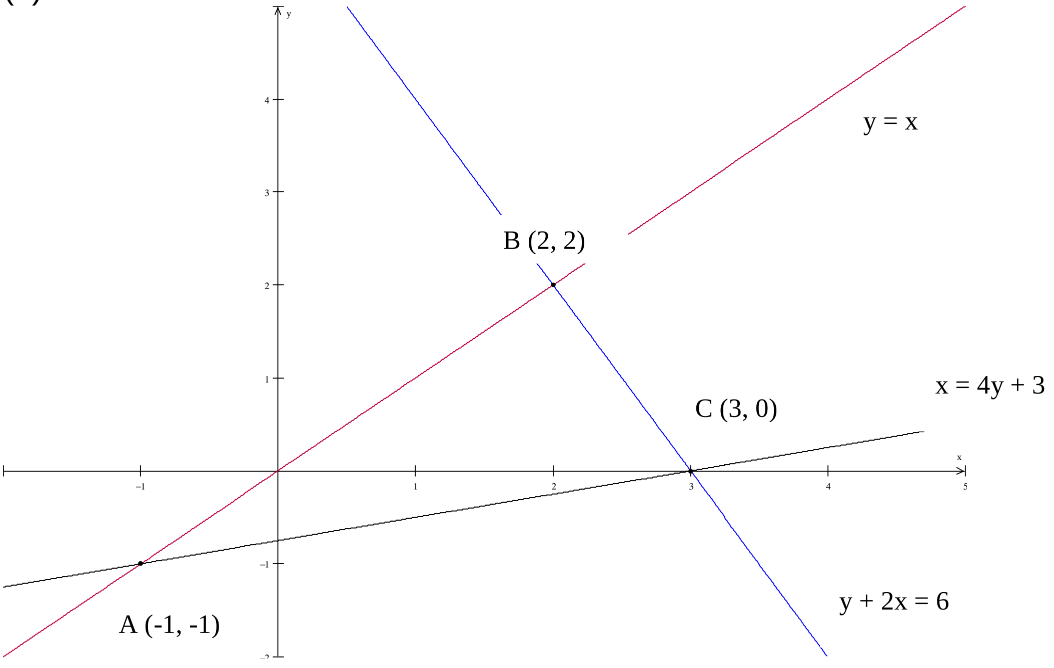
6



Máximo: 1; se alcanza para x = 1 e y = 0.
Mínimo: -23/24; se alcanza para x = 7/24 e y = 5/4.

7 (a) Función objetivo : F(x, y) = 8x + 6y , restricciones: $\begin{array}{l} x + y \le 100000 \\ y \ge 0{,}6\,(x + y) \\ x \ge 0 \quad , \quad y \ge 0 \end{array}$

(b)



Máximo : 6; se alcanza en cualquier punto del segmento BC, pues la función objetivo se representa con rectas paralelas a y + 2x = 6.

8 (a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $X = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

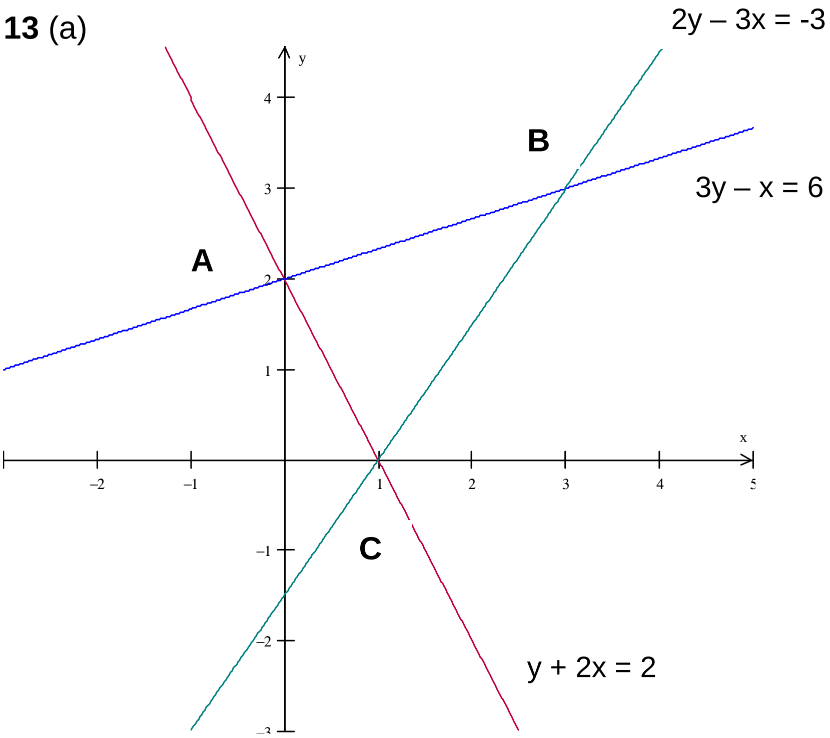
9 12500 entradas de adulto y 7500 de niño; 262 500 euros

10 (a) x = 2 ; (b) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ (coincide con la inversa de A^t)

11 10 fijos y 12 portátiles; 2800 euros

12 (a) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; (b) x = 3/2 e y = 0

13 (a)



(b) A = (0, 2) B = (3, 3) C = (1, 0)
(c) El valor mínimo es -2 y se alcanza para x = 0 e y = 2 (vértice A).

14 (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) B puede ser cualquier matriz de dimensión 2 x n (con dos filas).
(c) B puede ser cualquier matriz de dimensión n x 2 (con dos columnas).

15 (a) Enero: $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ Febrero: $\begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ Marzo: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 14 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(b) Trimestre completo: $\begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{pmatrix}$

(c) Ganancia trimestral por cliente: $\begin{pmatrix} 27 & 15 \\ 15 & 35 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3660 \\ 4700 \\ 3120 \end{pmatrix}$

Ganancia total: 11480 €

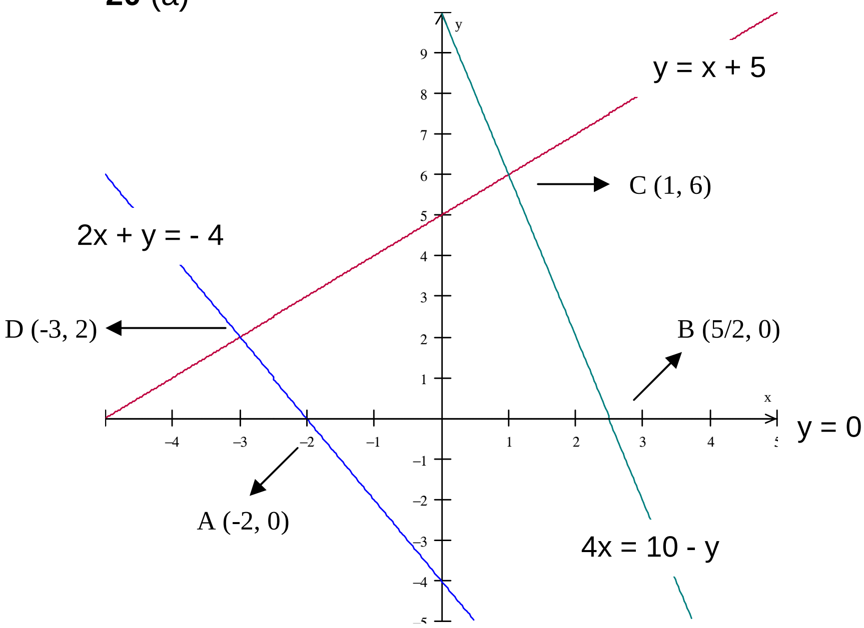
16 75 camisas y 300 pantalones; el beneficio será de 17250 €.

17 (a) a = -1 y b = 0; la matriz sería simétrica, porque se cumple que $A = A^t$.
(b) $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -3 & 9/2 \end{pmatrix}$

18 (a) 100 tapices modelo A y 200 tapices modelo B; el beneficio es de 800000 €.
(b) Solo quedarán 25 kg de hilo de oro.

19 (a) $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 2014a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

20 (a)



(b) Mínimo = -2 ; se alcanza en los vértices A y D (para x = -2 e y = 0 y para x = - 3 e y = 2).
Máximo = 4 ; se alcanza en el vértice C (para x = 1 e y = 6).

21 (a) $X = \begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -7/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 1 & -21/2 \\ 11/2 & -5/2 \end{pmatrix}$ (b) $Z = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5/2 & 25/2 \end{pmatrix}$

22 (a) x → nº envases pequeños
y → nº envases grandes

<u>Función objetivo</u> : C(x, y) = 0,1 x + 0,2 y (coste de almacenaje, en euros)
Debe ser mínimo.

<u>Restricciones</u>: x + y # 1000
y $x
x $ 100 ; y $ 200

(b)