APLICACIONES DEL CÁLCULO VECTORIAL EN V^3

1 Dados los puntos A (8, -1, 0) y B (2, 1, 5):
a) Halla el punto medio del segmento AB.
b) Calcula el punto simétrico de B con respecto a A.
c) Halla dos puntos P y Q tales que el segmento AB quede dividido en tres partes iguales por dichos puntos.
d) Indica razonadamente si el punto C (3, -1, 4) está alineado con A y B.

2 De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos A (1, 2, -1), B (0, 1, 3) y C (4, 3, 1).
a) Calcula las coordenadas del cuarto vértice D.
b) Halla la medida de los lados del paralelogramo.
c) Calcula el área de la figura.
d) Calcula el valor de los ángulos interiores del polígono.

3 Dados los puntos A (7, 2, 1), B (-1, 0, 4), C (2, 1, 0) y D (1, 1, 1), indica razonadamente si se encuentran contenidos en el mismo plano.

4 Los vértices de un tetraedro se encuentran en los puntos A (1, 0, 1), B (2, 0, 2), C (3, 0, 2) y D (1, -1, -1).
a) Halla el volumen de la figura.
b) Calcula el área de la cara delimitada por los vértices A, B y C.
d) Halla la altura correspondiente a esa cara. (*Nota. Recuerda que el volumen de una pirámide se calcula como* $V = 1/3\, A_{base} \cdot h$)

5 Queremos dibujar un ángulo de 90º con su vértice en el punto O (1, 2, 3). Sabiendo que uno de sus lados pasará por el punto (2, 3, 2), encuentra un punto que, unido con el vértice O, nos ayude a trazar el ángulo.

6 Dados dos puntos A (2, -2, 1) y B (3, 4, 5), halla un tercer punto C de tal manera que el triángulo ABC sea rectángulo en el vértice C. ¿Cuántas soluciones al problema existen?

7 Considera el punto P (3, 2, 1).
a) Encuentra otro punto Q que se encuentre exactamente a una distancia de 5 u de él.
b) Calcula un punto R alineado con P y Q, tal que la distancia desde R a P sea el cuádruple de la distancia desde P a Q. ¿Cuántos posibles puntos con estas características existen?

8 Sean los vectores **u** = (1, 2, 3), **v** = (0, 3, 1) y **w** = (2, 7, 0).
a) ¿Son linealmente independientes?
b) En caso afirmativo, halla el volumen del paralelepípedo que definen.
c) Si los tres vectores tienen origen común en el punto O (0, 1, 2), calcula las coordenadas de los restantes vértices del poliedro.

SOLUCIONES

1 (a) (5, 0, 5/2) (b) (14, -3, -5) (c) P (6, -1/3, 5/3) y Q (4, 1/3, 10/3)
(d) No están alineados (los vectores que se forman no son de la misma dirección)

2 (a) D (5, 4, -3) (b) $3\sqrt{2}$ u y $2\sqrt{6}$ u (c) $2\sqrt{59}$ u^2
(d) 47.7º y 132.3º

3 No se encuentran en el mismo plano (se pueden formar tres vectores linealmente independientes tomándolos dos a dos).

4 (a) 1/6 u^3 (b) 1/2 u^2 (c) h = 1

5 Hay infinitos puntos posibles; uno puede ser, por ejemplo, (0, 3, 3).

6 Hay infinitas soluciones (son todos los puntos de una esfera que tiene como diámetro el segmento AB). Uno puede ser C (3, 4, 1).

7 (a) Existen infinitos puntos con esa característica (todos los de una esfera de radio 5 centrada en P). Uno podría ser Q (7, 5, 1).
(b) Una vez fijados P y Q, hay dos posibles puntos R a cuádruple distancia de P. Para el punto Q anterior, son R (19, 14, 1) y R' (-13, -10, 1).

8 (a) Sí (b) 21 u^3
(c) Los ocho vértices son (0, 1, 2), (1, 3, 5), (1, 6, 6), (0, 4, 3), (2, 8, 2), (2, 11, 3), (3, 13, 6) y (3, 10, 5).