NÚMEROS COMPLEJOS

1 Define los siguientes términos relacionados con el conjunto C de los números complejos: UNIDAD IMAGINARIA ; ARGUMENTO ; CONJUGADO ; FORMA POLAR ; MÓDULO ; FORMA BINÓMICA ; AFIJO ; PLANO COMPLEJO.

2 Realiza estas operaciones con números complejos en forma binómica:

a) $3i \cdot (2 - 5i) + (4 - i)^2$

b) $(3 - i) \cdot (5 + 3i) - 2\,(6 - 2i)$

c) $\dfrac{4i}{2-2i} - 5$

d) $(-3 + 2i)^{-2} \cdot (1 + i)$

e) $(2 - i)^4$

f) $(2i)^{11}$

g) $(7 - 3i) \cdot (14 + i) - \dfrac{1}{3i}$

h) $(\sqrt{3} - 2i)^6$

3 Dados $z_1 = 5 + 5i$ y $z_2 = -3 + 2i$, calcula:

a) $|z_1| - 3\,|z_2|$

b) $(z_1 - \overline{z}_2) \cdot z_1$

c) $|\overline{z}_1 + \overline{z}_2|$

d) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

4 Sea el número z = x – 2i. Calcula el valor o valores que debe tomar x en cada uno de los siguientes casos:

a) El módulo de z es igual a 8.

b) El argumento de z está comprendido entre 225º y 270º.

c) El cuadrado de z es un número imaginario puro.

d) El cociente entre z y el número 3 – 3i es un número real.

5 Completa la siguiente tabla:

Forma binómica	*Forma polar*	*Forma trigonométrica*
$3 - 3i$		
	$7_{35º}$	
		2 (cos 225º + i sen 225º)
$-1 + \sqrt{3}\,i$		
	$3_{2\pi/5}$	
$15 - 5\sqrt{3}\,i$		

6 Realiza estas operaciones, dados $z_1 = 5_{30º}$ y $z_2 = 2_{4\pi/3}$:

a) $z_1 \cdot z_2$

b) $z_2 : z_1$

c) $z_2^2 \cdot z_1$

d) z_1^6

e) $z_1 + z_2$

f) $z_1^3 : \overline{z}_2$

7 ¿Verdadero o falso? Justifica tu respuesta.
a) Un número de la forma $r_{180º}$ es imaginario puro.
b) Cualquier número complejo tiene n raíces n-ésimas.
c) El afijo del conjugado de z es el punto simétrico del afijo de z con respecto al origen de coordenadas.
d) El conjugado de la suma es la suma de los conjugados.
e) El opuesto de r_{α} es $r_{-\alpha}$.
f) El doble de r_{α} es $2r_{2\alpha}$.

8 Halla las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) $1 - i$ b) $8_{30º}$ c) $15\ (\cos 300º + i \operatorname{sen} 300º)$

9 Calcula las raíces indicadas en cada caso:

a) $\sqrt[4]{3+2i}$ c) $\sqrt[6]{-64}$ e) $\sqrt[5]{1_{120º}}$

b) $\sqrt[10]{-4i}$ d) $\sqrt[5]{-4+4i}$ f) $\sqrt[8]{-2-i}$

10 Para hallar un número complejo z nos dicen que su módulo es 5 y que la suma $z + \bar{z}$ es igual a 6.
a) Calcula el número y exprésalo en forma polar.
b) Halla sus raíces cuartas y represéntalas de forma aproximada en el plano complejo.

11 El cuadrado de un número complejo es $4_{70º}$.
a) ¿Podemos afirmar que el afijo de dicho número se encuentra en el primer cuadrante? Justifica tu respuesta.
b) Si nos dicen que sus partes real e imaginaria tienen el mismo signo, ¿sabremos de qué número se trata?

12 Resuelve estas ecuaciones polinómicas en el conjunto C:

a) $x^3 - 2x^2 + 25x - 50 = 0$ b) $x^4 - x^2 - 12 = 0$
c) $x^5 - 32 = 0$ d) $x^3 + x^2 + x = 0$

SOLUCIONES

1. UNIDAD IMAGINARIA: Es igual a la raíz cuadrada de -1. Se simboliza como i.
ARGUMENTO: Es el ángulo positivo que forma con el semieje positivo de abscisas el vector de posición del afijo de un número complejo.
CONJUGADO: Es el número complejo que se obtiene cambiando el signo de la parte imaginaria de otro número dado.
FORMA POLAR: Es la forma de escribir un número complejo indicando su módulo y su argumento como subíndice.
MÓDULO: Es el módulo (longitud) del vector de posición del afijo de un número complejo.
FORMA BINÓMICA: Es la forma de escribir un número complejo indicando sus partes real e imaginaria.
AFIJO: Es el punto que representa un número complejo en el plano.
PLANO COMPLEJO: Es el plano cartesiano en el que se representan los números complejos, indicando su parte real en el eje de abscisas y su parte imaginaria en el de ordenadas.

2. a) $30 - 2i$ b) $6 + 8i$ c) $-6 + i$
d) $\frac{-7+17i}{169}$ e) $-7 - 24i$ f) $-2048i$
g) $101 - 104/3\ i$ h) $143 + 180\sqrt{3}i$

3. a) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{13}$. b) $5 + 75i$
c) $\sqrt{53}$ d) $-25 + 5i$

4. a) $x = \pm 2\sqrt{15}$ b) $-2 < x < 0$ c) $x = \pm 2$ d) $x = 2$

5.

Forma binómica	*Forma polar*	*Forma trigonométrica*
$3 - 3i$	$3\sqrt{2}_{315^{o}}$	$3\sqrt{2}(\cos 315^{o} + i \operatorname{sen} 315^{o})$
$5{,}73 + 4{,}02\ i$	$7_{35^{o}}$	$7\ (\cos 35^{o} + i \operatorname{sen} 35^{o})$
$-\sqrt{2} - \sqrt{2}\ i$	$2_{225^{o}}$	$2\ (\cos 225^{o} + i \operatorname{sen} 225^{o})$
$-1 + \sqrt{3}i$	$2_{120^{o}}$	$2\ (\cos 120^{o} + i \operatorname{sen} 120^{o})$
$0{,}93 + 2{,}85\ i$	$3_{2\pi/5}$	$3\ (\cos 2\pi/5 + i \operatorname{sen} 2\pi/5)$
$15 - 5\sqrt{3}i$	$10\sqrt{3}_{330^{o}}$	$10\sqrt{3}(\cos 330^{o} + i \operatorname{sen} 330^{o})$

6. a) $10_{270^{o}}$ b) $\left(\frac{2}{5}\right)_{210^{o}}$ c) $20_{150^{o}}$
d) $15625_{180^{o}}$ e) $5{,}33 + 0{,}77\ i$ f) $\left(\frac{125}{2}\right)_{330^{o}}$

7. a) Falso. Se trata de un número real negativo.
b) Verdadero.
c) Falso. Es el simétrico con respecto al eje de abscisas.
d) Verdadero.
e) Falso. El opuesto sería de la forma $r_{180º + \alpha}$.
f) Falso. El doble es $2r_{\alpha}$.

8. a) $\sqrt[6]{2}_{105º}$, $\sqrt[6]{2}_{225º}$, $\sqrt[6]{2}_{345º}$ b) $2_{10º}$, $2_{130º}$, $2_{250º}$
c) $\sqrt[3]{15}_{100º}$, $\sqrt[3]{15}_{220º}$, $\sqrt[3]{15}_{340º}$

9. a) $\sqrt[8]{13}_{8,4º}$, $\sqrt[8]{13}_{98,4º}$, $\sqrt[8]{13}_{188,4º}$, $\sqrt[8]{13}_{278,4º}$
b) $\sqrt[5]{2}_{27º}$, $\sqrt[5]{2}_{63º}$, $\sqrt[5]{2}_{99º}$, $\sqrt[5]{2}_{135º}$, $\sqrt[5]{2}_{171º}$, $\sqrt[5]{2}_{207º}$, $\sqrt[5]{2}_{243º}$, $\sqrt[5]{2}_{279º}$, $\sqrt[5]{2}_{315º}$, $\sqrt[5]{2}_{351º}$
c) $2_{30º}$, $2_{90º}$, $2_{150º}$, $2_{210º}$, $2_{270º}$, $2_{330º}$
d) $\sqrt{2}_{27º}$, $\sqrt{2}_{99º}$, $\sqrt{2}_{171º}$, $\sqrt{2}_{243º}$, $\sqrt{2}_{315º}$
e) $1_{24º}$, $1_{96º}$, $1_{168º}$, $1_{240º}$, $1_{312º}$
f) $\sqrt[16]{5}_{25,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{70,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{115,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{160,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{205,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{250,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{295,8º}$, $\sqrt[16]{5}_{340,8º}$

10. a) $z = 3 + 4i \rightarrow 5_{53,13º}$ b) $\sqrt[4]{5}_{13,3º}$, $\sqrt[4]{5}_{103,3º}$, $\sqrt[4]{5}_{193,3º}$, $\sqrt[4]{5}_{283,3º}$

11. a) No, ya que puede estar tanto en el primer como en el tercer cuadrante.
b) No, pues seguiremos sin poder decidir en cuál de los dos posibles cuadrantes se encuentra.

12. a) $x_1 = 2$; $x_2 = 5i$; $x_3 = -5i$
b) $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $x_3 = \sqrt{3}\,i$; $x_4 = -\sqrt{3}\,i$
c) $x_1 = 2_{0º}$; $x_2 = 2_{72º}$; $x_3 = 2_{144º}$; $x_4 = 2_{216º}$; $x_5 = 2_{288º}$
d) $x_1 = 0$; $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$